FEYNMAN-KAC TYPE FORMULA FOR SCHRODINGER SEMIGROUPS WITH BERNSTEIN FUNCTION OF THE LAPLACIAN AND SPIN (Spectral and Scattering Theory and Related Topics)

数理解析研究所講究録
第 1696 巻 2010 年 119-143

FEYNMAN-KAC TYPE FORMULA FOR SCHRÖDINGER SEMIGROUPS WITH BERNSTEIN FUNCTION OF THE LAPLACIAN AND SPIN

廣島 文生　九大・数理

1 Bernstein 関数と Lévy の subordinator

1.1 はじめに

この報告は [HL08] の続編である. [HL08] ではスピン 1/2 をもったシュレディンガー熱半群の経路積分表示を与えた. しかし non-local な場合には未解明であった. つまり相対論的シュレディンガー熱半群の経路積分表示を与えることができなかった. しかし, 今回 non-local な場合を含むより一般的な場合に対してもシュレディンガー熱半群が定義できて, その経路積分表示を構成できることが分かった. この報告では

2 章 $\cdots$ 経路積分表示・スピンなし
3 章 $\cdots$ 経路積分表示・スピンあり

に分けて解説する. スピンなしの場合は既に [Hir09] で解説してあり, もちろんスピンを含まない場合は含む場合の特別な場合とみなすことができるが, 論述を分かりやすくするために敢えてスピンありとスピンなしに分けて解説した. また講演では場の量子論の話題にも触れたが紙数の都合でこの報告では場の量子論には触れなかった [Hir07, HL08].

Feynman-Kac (FK) 型公式はシュレディンガー作用素を典型的な例とする自己共役作用素の生成する熱半群の経路積分表示を与える. FK 公式からその生成子のスペクトルを解析することが出来ることはよく知られている [Sim04]. 外場ポテンシャル

$$V:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},$$

ベクトルポテンシャル

$$a:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$$

さらにスピン 1/2 をもったシュレディンガー作用素は $L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^2)$ 上の自己共役作用素

$$h=\frac{1}{2}(\sigma\cdot(\mathrm{p}-a))^2+V, \tag{1.1}$$

で定義される. ここで $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ は 2×2 Pauli 行列で $\sigma_\mu\sigma_\nu=i\sum_{\lambda=1}^3\epsilon^{\lambda\mu\nu}\sigma_\lambda$ を満たし, $\epsilon^{\lambda\mu\nu}$ は反対称な Levi-Cività テンソルで $\epsilon^{123}=1$ である. σ_μ は対称でトレース=0 の行列であり, 反正準交換関係

$$\sigma_i\sigma_j+\sigma_j\sigma_i=2\delta_{ij}I_2$$

を満たす．h が生成する熱半群

$$e^{-th}, \quad t \geq 0,$$

の経路積分表示は知られている [ALS83, HIL09]．さらに [ARS91] では non-local な作用素である相対論的シュレディンガー作用素

$$h_{\rm rel} = \sqrt{(\sigma \cdot (\mathrm{p} - a))^2 + m^2} - m + V \tag{1.2}$$

の経路積分表示を構成している．ただし，数学的に厳密な理論が展開されているわけではない．

さて相対論的シュレディンガー作用素 $h_{\rm rel}$ は h をもちいて

$$h_{\rm rel} = \sqrt{2h + m^2} - m + V$$

と表せる．ここで関数 $f(u) = \sqrt{2u + m^2} - m$ は (1) $f \in C^\infty((0,\infty))$, (2) $f(u) \geq 0$, (3) $(-1)^n \dfrac{d^n f}{du^n} \leq 0$, $n \geq 1$, を満たすことは容易に確かめられる．一般に (1) - (3) を満たす関数を Bernstein 関数という．この報告では Ψ を任意の Bernstein 関数として次のような自己共役作用素が生成する熱半群の経路積分表示を構成する：

$$H^\Psi = \Psi\left(\frac{1}{2}(\sigma \cdot (\mathrm{p} - a))^2\right) + V. \tag{1.3}$$

もちろん相対論的シュレディンガー作用素も含んでいる．

この報告の主定理である，**定理** 2.6, **定理** 3.9 では FK 公式を与える．さらに**定理** 2.15 で Ψ-Kato クラスポテンシャルを定義して，対応するシュレディンガー作用素を定義する．

1.2 Bernstein 関数と subordinators

定義 1.1 (Bernstein 関数)

$$\mathcal{B} = \left\{ f \in C^\infty((0,\infty)) \,\middle|\, f(x) \geq 0, (-1)^n \left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)(x) \leq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$

とする．$\mathcal{B}$ に含まれる関数を Bernstein 関数という．部分集合 $\mathcal{B}_0$ を次で定める：

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ f \in \mathcal{B} \,\middle|\, \lim_{u \to 0+} f(u) = 0 \right\}.$$

Bernstein 関数は正の単調増加関数で上に凸な関数である．$\mathcal{B}_0$ の典型的な例は (a) $\Psi(u) = cu^\alpha$, $c \geq 0$, $\alpha \in (0,1]$, (b) $\Psi(u) = 1 - e^{-au}$, $a \geq 0$ などである．いま，$\mathcal{L}$ を $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上のボレル測度 λ で次を満たすもの全体とする：

$$(1)\ \lambda((-\infty, 0)) = 0, \quad (2)\ \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (y \wedge 1)\lambda(dy) < \infty.$$

$\lambda \in \mathcal{L}$ は $\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (y^2 \wedge 1)\lambda(dy) < \infty$ を満たすので，Lévy 測度の一種である．$\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ とおく．さて Bernstein 関数 $\Psi \in \mathcal{B}_0$ に対して，実は $(b, \lambda) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{L}$ で次を満たすものが存在する：

$$\Psi(u) = bu + \int_0^\infty (1 - e^{-uy})\lambda(dy). \tag{1.4}$$

逆に $(b.\lambda) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{L}$ に対して (1.4) の右辺は $\mathcal{B}_0$ に含まれる．つまり

$$\mathcal{B}_0 \to \mathbb{R}_+ \times \mathcal{L}, \quad \Psi \mapsto (b, \lambda)$$

は 1 対 1 上への対応になっている．

定義 1.2 (Lévy の subordinator) 確率空間 $(\Omega_\nu, \mathcal{F}_\nu, \nu^0)$ 上の確率過程 $(T_t)_{t\geq 0}$ が次を満たすとき subordinator とよばれる：

(1) $(T_t)_{t\geq 0}$ は ゼロから出発する Lévy 過程，$\nu^0(T_0 = 0) = 1$;

(2) T_t は t について非減少．

Subordinator はもちろん Lévy 過程なのでマルコフ過程でもある．$\mathcal{S}$ を $(\Omega_\nu, \mathcal{F}_\nu, \nu^0)$ 上の subordinator 全体の集合とする．以降，x からスタートするパス上の確率測度 m^x に関する期待値を $\mathbb{E}^x_m[\cdots] = \int \cdots dm^x$ で表す．次の命題は基本的である．

命題 1.3 $\Psi \in \mathcal{B}_0$ とする．このとき $(T_t)_{t\geq 0} \in \mathcal{S}$ で次を満たすものが一意的に存在する：

$$\mathbb{E}^0_\nu[e^{-uT_t}] = e^{-t\Psi(u)}. \tag{1.5}$$

逆に $(T_t)_{t\geq 0} \in \mathcal{S}$ としよう．このとき $\Psi \in \mathcal{B}_0$ で *(1.5)* を満たすものが存在する．

つまり $\mathcal{S}$, $\mathcal{B}_0$, $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{L}$ はお互いに同一視することができる．記号 $T^\Psi_t \in \mathcal{S}$ は $\Psi \in \mathcal{B}_0$ に対応する subordinator を表すものとする．$\mathbb{E}^0_\nu[e^{-T_t u}] = e^{-t\Psi(u)}$ を右から左に読んで，u がシュレディンガー作用素 h と思えば $e^{-t\Psi(h)}$ の経路積分表示はランダムな時間 T_t を導入して，$e^{-T_t h}$ の T_t に関する期待値をとることで実現できそうなことがわかる。実際，このアイデアで non-local な場合のシュレディンガー熱半群の経路積分表示を構成する．

2 経路積分表示・スピンなし

2.1 一般化されたシュレディンガー作用素

次の条件を導入する．

仮定 2.1 $a = (a_1, ..., a_d)$ の各成分 a_μ は実数値関数とする．次の条件を導入する：

(A1) $a \in (L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^d))^d$.

(A2) $a \in (L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^d))^d$, $\nabla \cdot a \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^d)$.

(A3) $a \in (L^4_{\rm loc}(\mathbb{R}^d))^d$, $\nabla \cdot a \in L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^d)$.

(A4) $d = 3$, $a \in (L^4_{\rm loc}(\mathbb{R}^3))^3$, $\nabla \cdot a \in L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^3)$ かつ $\nabla \times a \in (L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^3))^3$.

(A1) はシュレディンガー作用素を 2 次形式で定義するのに必要な条件である．(A2) は FK 公式のために必要になる．(A3) は h の作用素としての性質を見るときに有用な条件である．(A4) はスピンをもつシュレディンガー作用素の性質を調べるときに役立つ．

$\partial_\mu : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $\mu = 1, ..., d$, はシュワルツ超関数空間上の微分作用素とする．$\mathrm{p}_\mu = -i\partial_\mu$, $\mathrm{D}_\mu = \mathrm{p}_\mu - a_\mu$ とする．2 次形式 q を

$$q(f, g) = \sum_{\mu=1}^{3} (\mathrm{D}_\mu f, \mathrm{D}_\mu g) \tag{2.1}$$

で定義し，その定義域を

$$Q(q)=\left\{f\in L^2(\mathbb{R}^d)\,|\,\mathrm{D}_\mu f\in L^2(\mathbb{R}^d),\mu=1,...,d\right\}$$

とする．q は非負な閉 2 次形式なので，次を満たす自己共役作用素 h がただ一つ存在する：

$$(hf,g)=q(f,g),\quad f\in D(h),\quad g\in Q(q). \tag{2.2}$$

さらに h の定義域は

$$D(h)=\left\{f\in Q(q)\,|\,q(f,\cdot)\in L^2(\mathbb{R}^d)'\right\}$$

で与えられる．h の自己共役性について知られている事実を羅列する．詳細は [LS81] を参照せよ．

命題 2.2 **(1)** *(A1)* を仮定する．このとき $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ は *2* 次形式 q の芯である．

(2) *(A3)* を仮定する．このとき $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ は作用素 h の芯である．

$\Psi\in\mathcal{B}_0$ として次も容易に示せる．

命題 2.3 **(1)** *(A1)* を仮定する．このとき $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ は *2* 次形式としての $\Psi(h)$ の芯である．

(2) *(A3)* を仮定する．このとき $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ は $\Psi(h)$ の芯である．

定義 2.4 (一般化されたシュレディンガー作用素) *(A1)* を仮定する．$\Psi\in\mathcal{B}_0$ で V が有界のとき

$$H^\Psi=\Psi(h)+V \tag{2.3}$$

を一般化されたシュレディンガー作用素という．

以下に見るように磁場がある場合には FK 公式に確率積分 $\int_0^t a(B_s)\cdot dB_s$ が現れる．そこでまず確率積分について説明する．$(\Omega_P,\mathcal{F}_P,dP^x)$ をウィナー空間とし，$(B_t)_{t\geq0}$ をその上の d 次元ブラウン運動とする．f を $\mathbb{C}^d$-値ボレル可測関数で次を満たすものとする：

$$\mathbb{E}_P^x\left[\int_0^t |f(B_s)|^2ds\right]<\infty. \tag{2.4}$$

このとき確率積分 $\int_0^t f(B_s)\cdot dB_s$ はマルチンゲールとして定義され，等式

$$\mathbb{E}_P^x\left[\left|\int_0^t f(B_s)\cdot dB_s\right|^2\right]=\mathbb{E}_P^x\left[\int_0^t |f(B_s)|^2ds\right]$$

を満たす．しかしながら**仮定** 2.1 のベクトルポテンシャル a は (2.4) を満たさない．そこで確率積分を拡張する必要がある．$f=(f_1,...,f_d)$ で全ての $t\geq0$ に対して $P^x\left(\int_0^t|f(B_s)|^2ds<\infty\right)=1$ を満たすもの全体を $\mathcal{E}_{\mathrm{loc}}$ で表す．

$$R_n(\omega)=n\wedge\inf\left\{t\geq0\,\middle|\,\int_0^t|f(B_s(\omega))|^2ds\geq n\right\}$$

は $\mathcal{F}_t^P = \sigma(B_s, 0 \le s \le t)$ に関する停止時刻の列である．$f_n(s,\omega) = f(B_s(\omega))1_{\{R_n(\omega)>s\}}$ とすれば $\int_0^\infty |f_n(s,\omega)|^2 ds = \int_0^{R_n} |f_n(s,\omega)|^2 ds \le n$ を満たす．特に $\mathbb{E}_P^x \left[\int_0^t |f_n|^2 ds\right] < \infty$ なので $\int_0^t f_n \cdot dB_s$ が定義され，

$$\int_0^{t\wedge R_m} f_n(s,\omega) \cdot dB_s = \int_0^t f_m(s,\omega) \cdot dB_s \tag{2.5}$$

が $m < n$ のとき成立する．$f \in \mathcal{E}_{\rm loc}$ とする．このとき

$$\int_0^t f(B_s) \cdot dB_s = \int_0^t f_n(s,\omega) \cdot dB_s, \quad 0 \le t \le R_n \tag{2.6}$$

と定める．この定義は (2.5) と整合している．$\mathcal{E}_{\rm loc}$ は次の性質をもつ：

(1) $f \in \mathcal{E}_{\rm loc}$ とする．階段関数列 f_n が $\int_0^t |f_n(B_s) - f(B_s)|^2 ds \to 0$ in prob. を満たすとき次が成立する：$\lim_{n\to\infty} \int_0^t f_n(B_s) \cdot dB_s = \int_0^t f(B_s) \cdot dB_s$ in prob.

(2) $(L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^d))^d \subset \mathcal{E}_{\rm loc}$.

(3) a が (A2) を満たすとき次が成り立つ：

$$\left| \int_0^t a(B_s) \cdot dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \nabla \cdot a(B_s) ds \right| < \infty \quad \text{a.s.}$$

この拡張された確率積分をもちいて一般的な $a \in \left(L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^d)\right)^d$ に対して e^{-th} の経路積分表示が得られる．$(A2)$ を満たす a に対して，

$$\int_0^t a(B_s) \circ dB_s = \int_0^t a(B_s) \cdot dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \nabla \cdot a(B_s) ds$$

と定める．次は Feynman-Kac- Itô の公式として知られている．

命題 2.5 *(A2)* を仮定する．このとき次が成り立つ：

$$(f, e^{-th} g) = \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_P^x \left[\overline{f(B_0)} g(B_t) e^{-i \int_0^t a(B_s) \circ dB_s} \right]. \tag{2.7}$$

証明: 例えば [Sim04, 定理 15.5] と [HIL09] を参照せよ． **終り**

2.2 FK 公式・スピンなし

シュレディンガー作用素 H^Ψ が作る熱半群の経路積分表示を考える．アイデアは subordinator を利用するところにある．

定理 2.6 (FK 公式) $\Psi \in \mathcal{B}_0$, $V \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ としよう．*(A2)* を仮定する．このとき次が成り立つ：

$$(f, e^{-tH^\Psi} g) = \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_{P\times\nu}^{x,0} \left[\overline{f(B_0)} g(B_{T_t^\Psi}) e^{-i \int_0^{T_t^\Psi} a(B_s) \circ dB_s} e^{-\int_0^t V(B_{T_s^\Psi}) ds} \right]. \tag{2.8}$$

証明: 記号を簡単にするために T^Ψ を T と書くことにする.
(Step 1) $V=0$ とする. このとき次が成立する:

$$(f, e^{-t\Psi(h)}g) = \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}^{x,0}_{P\times\nu}\left[\overline{f(B_0)}g(B_{T_t})e^{-i\int_0^{T_t} a(B_s)\circ dB_s}\right]. \tag{2.9}$$

E^h を自己共役作用素 h のスペクトル射影作用素としよう. このとき

$$(f, e^{-t\Psi(h)}g) = \int_{\mathrm{Spec}(h)} e^{-t\Psi(u)} d(f, E^h_u g). \tag{2.10}$$

ここに恒等式 $\mathbb{E}^0_\nu[e^{-uT_t}] = e^{-t\Psi(u)}$ を代入すれば

$$(f, e^{-t\Psi(h)}g) = \mathbb{E}^0_\nu\left[(f, e^{-T_t h}g)\right]$$

をえるので, Feynman-Kac-Itô 公式により

$$(f, e^{-t\Psi(h)}g) = \mathbb{E}^0_\nu\left[\int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}^x_P\left[\overline{f(B_0)}g(B_{T_t})e^{-i\int_0^{T_t} a(B_s)\circ dB_s}\right]\right]$$

がわかる. よって (2.9) が従う.
(Step 2) $0=t_0<t_1<\cdots<t_n$, $f_0, f_n \in L^2(\mathbb{R}^d)$ とする. また $f_j \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $j=1,...,n$, としよう. このとき次が成り立つ:

$$\left(f_0, \prod_{j=1}^n e^{-(t_j-t_{j-1})\Psi(h)}f_j\right) = \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}^{x,0}_{P\times\nu}\left[\overline{f_0(B_0)}\left(\prod_{j=1}^n f_j(B_{T_{t_j}})\right)e^{-i\int_0^{T_t} a(B_s)\circ dB_s}\right]. \tag{2.11}$$

簡単に $G_j(\cdot) = f_j(\cdot)\left(\prod_{i=j+1}^n e^{-(t_i-t_{i-1})\Psi(h)}f_i\right)(\cdot)$ と書くことにしよう. (Step 1) により左辺は

$$\int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}^{x,0}_{P\times\nu}\left[\overline{f_0(B_0)}e^{-i\int_0^{T_{t_1-t_0}} a(B_s)\circ dB_s}G_1(B_{T_{t_1-t_0}})\right]$$

とあらわせる. $\mathcal{F}^{\mathrm{P}}_t = \sigma(B_s, 0\le s\le t)$, $\mathcal{F}^\nu_t = \sigma(T_s, 0\le s\le t)$ とする. B_t のマルコフ性から

$$\begin{aligned}&\left(f_0, \prod_{j=1}^n e^{-(t_j-t_{j-1})\Psi(h)}f_j\right)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}^{x,0}_{P\times\nu}\left[\overline{f_0(B_0)}e^{-i\int_0^{T_{t_1}} a(B_s)\circ dB_s}\right.\\ &\qquad \left.\mathbb{E}^0_\nu\left[\mathbb{E}^0_P\left[f_1(B_{T_{t_1}})e^{-i\int_{T_{t_1}}^{T_{t_2-t_1}+T_{t_1}} a(B_s)\circ dB_s}G_2(B_{T_{t_1}+T_{t_2-t_1}})\middle|\mathcal{F}^P_{T_{t_1}}\right]\right]\right].\end{aligned}$$

が従う. その結果

$$\begin{aligned}&\left(f_0, \prod_{j=1}^n e^{-(t_j-t_{j-1})\Psi(h)}f_j\right)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}^{x,0}_{P\times\nu}\left[\overline{f_0(B_0)}e^{-i\int_0^{T_{t_1}} a(B_s)\circ dB_s}\mathbb{E}^0_\nu\left[f_1(B_{T_{t_1}})e^{-i\int_{T_{t_1}}^{T_{t_2-t_1}+T_{t_1}} a(B_s)\circ dB_s}G_2(B_{T_{t_1}+T_{t_2-t_1}})\right]\right]\end{aligned}$$

となる．また右辺は

$$\int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_{P\times\nu}^{x,0}\left[\overline{f_0(B_0)}e^{-i\int_0^{T_{t_1}} a(B_s)\circ dB_s} f_1(B_{T_{t_1}})\mathbb{E}_\nu^{T_{t_1}}\left[e^{-i\int_0^{T_{t_2-t_1}} a(B_s)\circ dB_s} G_2(B_{T_{t_2-t_1}})\right]\right]$$

と書けるから，T_t のマルコフ性を使うと

$$\begin{aligned}
&\left(f_0, \prod_{j=1}^n e^{-(t_j-t_{j-1})\Psi(h)} f_j\right) \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_{P\times\nu}^{x,0}\left[\overline{f_0(B_0)}e^{-i\int_0^{T_{t_1}} a(B_s)\circ dB_s} f_1(B_{T_{t_1}})\mathbb{E}_\nu^0\left[e^{-i\int_{T_{t_1}}^{T_{t_2}} a(B_s)\circ dB_s} G_2(B_{T_{t_2}})\middle| \mathcal{F}_{t_1}^\nu\right]\right] \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_{P\times\nu}^{x,0}\left[\overline{f_0(B_0)}e^{-i\int_0^{T_{t_1}} a(B_s)\circ dB_s} f_1(B_{T_{t_1}}) e^{-i\int_{T_{t_1}}^{T_{t_2}} a(B_s)\circ dB_s} G_2(B_{T_{t_2}})\right]
\end{aligned}$$

となる．これを繰り返せば (2.11) が従う．

(Step 3) V は $0 \neq V \in L^\infty$ で連続と仮定する．このとき (2.8) を示そう．トロッタ積公式より $(f, e^{-tH^\Psi}g) = \lim_{n\to\infty}(f, (e^{-(t/n)\Psi(h)}e^{-(t/n)V})^n g)$ となるので，(Step 2) から

$$(f, e^{-tH^\Psi}g) = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_{P\times\nu}^{x,0}\left[\overline{f(B_0)}g(B_{T_t})e^{-i\int_0^{T_t} a(B_s)\circ dB_s} e^{-\sum_{j=1}^n (t/n)V(B_{T_{tj/n}})}\right]$$

となる．ここで $s \mapsto B_{T_s(\tau)}(\omega)$ は càdlàg パス[1]をもつこと，$V(B_{T_s(\tau)}(\omega))$ は $s \in [0,t]$ について連続であること（ただし高々有限個の点を除いて）を用いれば

$$\sum_{j=1}^n \frac{t}{n} V(B_{T_{tj/n}}) \to \int_0^t V(B_{T_s})ds \quad (n \to \infty)$$

が各パスごとに成立するので (2.8) が成立する．

(Step 4) 最後に $V \in L^\infty$ としよう．$V_n = \phi(x/n)(V * j_n)$ とおく．ここで $j_n = n^d\phi(xn)$ は $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$，$0 \leq \phi \leq 1$，$\int \phi(x)dx = 1$，$\phi(0) = 1$ である．このとき V_n は有界連続関数で，さらに $V_n(x) \to V(x) (n \to \infty)$ が $x \notin \mathcal{N}$ に対して成り立つ．ここで $\mathcal{N}$ のルベーグ測度はゼロである．よってほとんど至るところの $(\omega, \tau) \in \Omega_P \times \Omega_N$ に対して，$\{t \in [0,\infty) \mid B_{T_t(\tau)}(\omega) \in \mathcal{N}\}$ のルベーグ測度はゼロである．その結果

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_{P\times\nu}^{x,0}\left[\overline{f(B_0)}g(B_{T_t})e^{-i\int_0^{T_t} a(B_s)\circ dB_s} e^{-\int_0^t V_n(B_{T_s})ds}\right] \\
&\qquad \to \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_{P\times\nu}^{x,0}\left[\overline{f(B_0)}g(B_{T_t})e^{-i\int_0^{T_t} a(B_s)\circ dB_s} e^{-\int_0^t V(B_{T_s})ds}\right].
\end{aligned}$$

一方 $\Psi(h) + V_n$ が $\Psi(h) + V$ に共通定義域 $D(\Psi(h))$ 上で強収束するので，

$$e^{-t(\Psi(h)+V_n)} \to e^{-t(\Psi(h)+V)} \quad \text{(強収束)}$$

がわかる．故に (2.8) が従う．　**終り**

定理 2.6 から次のいくつかの系が従う．スペクトルの下限を $\mathcal{E}[T] = \inf \mathrm{Spec}(T)$ で表そう．

---

[1]右連続かつ左極限が存在するパスの集合を表す．

系 2.7 (双極不等式) $\Psi \in \mathcal{B}_0$, $V \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ とし *(A2)* を仮定する．このとき次が成り立つ:

$$|(f, e^{-tH^\Psi} g)| \le (|f|, e^{-t(\Psi(\mathrm{p}^2/2)+V)}|g|).$$

特に $\mathcal{E}\left[\Psi(\mathrm{p}^2/2) + V\right] \le \mathcal{E}\left[H^\Psi\right]$ が成り立つ．

証明: **定理** 2.6 から $|(f, e^{-tH^\Psi} g)| \le \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}^{x,0}_{P\times\nu}\left[|f(B_0)||g(B_{T_t^\Psi})|e^{-\int_0^t V(B_{T_s^\Psi})ds}\right]$ なので系が従う． **終り**

次に一般的な外場ポテンシャル V を持ったシュレディンガー熱半群の経路積分表示を考えよう．

系 2.8 *(A2)* を仮定する[2]．

(1) $|V|$ は $\Psi(\mathrm{p}^2/2)$ に *2* 次形式の意味で相対有界でその相対閾値を b とする．このとき $|V|$ はまた $\Psi(h)$ に対しても *2* 次形式の意味で相対有界でその相対閾値は b を超えない．

(2) $|V|$ は $\Psi(\mathrm{p}^2/2)$ に相対有界でその相対閾値を b とする．このとき $|V|$ はまた $\Psi(h)$ に対しても相対有界でその相対閾値は b を超えない．

証明: 証明はもっと一般的な場合に**系** 3.11 で与える． **終り**

系 2.9 (1) *(A2)* を仮定し V は $\Psi(\mathrm{p}^2/2)$ に相対有界でその相対閾値は *1* より真に小さいとする．このとき $\Psi(h) + V$ は $D(\Psi(h))$ 上で自己共役で下から有界である．さらに $\Psi(h)$ の任意の芯上で本質的自己共役である．

(2) さらに *(A3)* を仮定する．このとき $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ は $\Psi(h) + V$ の芯である．

証明: (1) **系** 2.8 の (2) より，V は $\Psi(h)$ に相対有界でその相対閾値は 1 より真に小さいから，(1) は Kato-Rellich の定理から従う．(2) は**命題** 2.3 から従う． **終り**

系 2.8 から $\Psi(h) + V$ が 2 次形式の意味で定義されることがわかる．$V = V_+ - V_-$ とし，V_- は 2 次形式の意味で $\Psi(\mathrm{p}^2/2)$ に相対有界で相対閾値は 1 より真に小さいならば，$\Psi(h)$ にも相対有界でその相対閾値も真に 1 より小さい．さらに $V_+ \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ を仮定する．(A1) の仮定の下，$Q(\Psi(h)) \cap Q(V_+)$ は稠密であることがわかる．2 次形式を次で定義する．

$$\mathrm{q}(f,f) = (\Psi(h)^{1/2} f, \Psi(h)^{1/2} f) + (V_+^{1/2} f, V_+^{1/2} f) - (V_-^{1/2} f, V_-^{1/2} f), \tag{2.12}$$

定義域は $Q(\Psi(h)) \cap Q(V_+)$. KLMN 定理から q は下から有界な閉 2 次形式である．この 2 次形式に対応する一意的な自己共役作用素を $\Psi(h) \dotplus V_+ \dot{-} V_-$ で表す．このように一般的な V に対して定義されたシュレディンガー作用素に対しても FK 公式は成立する．結果だけを述べよう．

定理 2.10 *(A2)* を仮定する．$V = V_+ - V_-$ は $V_+ \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ で V_- は $\Psi(\frac{1}{2}\mathrm{p}^2)$ に関して *2* 次形式の意味で相対有界でその相対閾値が *1* より真に小さいとする．このとき**定理** *2.6* で与えられた経路積分表示がまた $\Psi(h) \dotplus V_+ \dot{-} V_-$ に対しても成り立つ．

[2] 一般に $D(T) \supset D(S)$ で $\|Tf\| \le a\|Sf\| + b\|f\|$ が任意の $f \in D(S)$ で成り立つとき，T は S に相対有界という．また上式を満たす a の下限を相対閾値ということにする．2 次形式の場合も同様に一般に $Q(T) \supset Q(S)$ で $T(f,f) \le aS(f,f) + b\|f\|^2$ が任意の $f \in Q(S)$ で成り立つとき，T は S に 2 次形式の意味で相対有界といい，a の下限を同様に相対閾値ということにする．

2.3 Ψ-Kato クラスポテンシャル

$\Psi \in \mathcal{B}_0$ に対して確率過程 $X_t : \Omega_P \times \Omega_\nu \ni (\omega, \tau) \mapsto B_{T_t^\Psi(\tau)}(\omega)$, $t \geq 0$, は Lévy 過程で，その特性関数は $\mathbb{E}^{0,0}_{P\times\nu}[e^{iuX_t}] = e^{-t\Psi(u^2/2)}$ である．

仮定 2.11 $\Psi \in \mathcal{B}_0$ は $\int_0^\infty e^{-t\Psi(u^2/2)}du < \infty$, $\forall t > 0$, を満たす．

仮定 2.11 の下で

$$p_t(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ixu}e^{-t\Psi(u^2/2)}du \tag{2.13}$$

とそのラプラス変換

$$\Pi_\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}p_t(x)dt$$

を定義する．$\|f\|_{l^1(L^\infty)} = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^d}\sup_{x\in C_\alpha}|f(x)|$ とする．ここで C_α は中心が $\alpha \in \mathbb{Z}^d$ の単位立方体とする．

仮定 2.12 p_t は $\sup_{t>0}\|1_{\{|x|>\delta\}}p_t\|_{l^1(L^\infty)} < \infty$ を満たす．

仮定 2.12 はもし p_t が回転対称で動径方向に非増加であれば満たされる．次の事実は [CMS90, 定理 III.1] と同様にして示すことができる．

命題 2.13 $V \geq 0$ とする．**仮定** *2.11* と *2.12* の下で，以下の *3* つは同値である．

(1) $\displaystyle\lim_{t\downarrow 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_0^t \mathbb{E}^{x,0}_{P\times\nu}[V(X_s)]ds = 0,$

(2) $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left((\Psi(\mathrm{p}^2/2)+\lambda)^{-1}V\right)(x) = 0,$

(3) $\displaystyle\lim_{\delta\downarrow 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{|x-y|<\delta}\Pi_1(x-y)V(y)dy = 0.$

$d = 3$ のとき Π_λ は次で与えられる：

$$\Pi_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi^2|x|}\int_0^\infty \frac{r\sin r}{|x|^2\left(\lambda+\Psi\left(\frac{r^2}{2|x|^2}\right)\right)}dr.$$

定義 2.14 (Ψ-Kato クラス) 仮定 *2.11* と *2.12* を仮定しよう．$V = V_+ - V_-$ が *Ψ-Kato クラス* であるとは任意のコンパクト集合 $C \subset \mathbb{R}^3$ に対して V_- と $1_C V_+$ が**命題** *2.13* の *(1)-(3)* のどれかを満たすことである．

定理 2.15 $\Psi \in \mathcal{B}_0$ とし V は *Ψ-Kato* クラス とする．*(A2)* を仮定し

$$\mathrm{U}_t f(x) = \mathbb{E}^{x,0}_{P\times\nu}\left[e^{-i\int_0^{T_t^\Psi} a(B_s)\circ dB_s}e^{-\int_0^t V(B_{T_s^\Psi})ds}f(B_{T_t^\Psi})\right]$$

とする．このとき $(\mathrm{U}_t)_{t\geq 0}$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の強連続な *1*-パラメター対称半群である．特に

$$\mathrm{U}_t = e^{-tK^\Psi}, \quad t \geq 0,$$

となる自己共役作用素 K^Ψ がただ一つ存在する．

証明: V が Ψ-Kato クラスのとき

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\mathbb{E}^{x,0}_{P\times\nu}\left[e^{\int_0^t V(X_s)ds}\right]<\infty \tag{2.14}$$

が成り立つことに注意しよう．よって

$$\|\mathrm{U}_t f\|^2\le C_t\|e^{-t\Psi(\mathrm{p}^2/2)}f\|^2\le C_t\|f\|^2$$

が従う．ここで $C_t=\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\mathbb{E}^{x,0}_{P\times\nu}[e^{2\int_0^t V_-(X_s)ds}]$ である．よって U_t は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の有界作用素である．後の**補題** 3.8 の証明と同じように半群性 $\mathrm{U}_t\mathrm{U}_s=\mathrm{U}_{t+s}$ を示すことができる．U_t の t に関する強連続性を示そう．U_t が一様に有界なので，弱連続性を示せば十分である．いま $f,g\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ としよう．このとき

$$(f,\mathrm{U}_t g)=\int_{\mathbb{R}^d}dx\mathbb{E}^{x,0}_{P\times\nu}\left[\overline{f(B_0)}g(B_{T_t})e^{-i\int_0^{T_t}a(B_s)\circ dB_s}e^{-\int_0^t V(B_{T_s})ds}\right]$$

である．$T_t(\tau)\to 0\ (t\to 0)$ が各 $\tau\in\Omega_\nu$ でいえるので，優収束定理より $(f,\mathrm{U}_t g)\to(f,g)$ がわかる．最後に U_t の対称性 $\mathrm{U}_t^*=\mathrm{U}_t$ を示そう．簡単な極限操作により $a\in(C_b^2(\mathbb{R}^d))^d$ に対して示せば十分である．$\widetilde{B}_s=\widetilde{B}_s(\omega,\tau)=B_{T_t(\tau)-s}(\omega)-B_{T_t(\tau)}(\omega)$ とする．このとき各 $\tau\in\Omega_\nu$ に対して $\widetilde{B}_s\stackrel{\mathrm{d}}{=}B_s$ となる[3]．よって

$$(f,\mathrm{U}_t g)=\mathbb{E}^{0,0}_{P\times\nu}\left[\int_{\mathbb{R}^d}dx\overline{f(x-\widetilde{B}_{T_t})}e^{-i\int_0^{T_t}a(x+\widetilde{B}_s-\widetilde{B}_{T_t})\circ d\widetilde{B}_s}e^{-\int_0^t V(x+\widetilde{B}_{T_s}-\widetilde{B}_{T_t})ds}g(x)\right]$$

となる[4]．ここで変数変換 $x\to x-\widetilde{B}_{T_t}$ をして，さらに

$$\int_0^{T_t}a(\widetilde{B}_s-\widetilde{B}_{T_t})\circ d\widetilde{B}_s=-\int_0^{T_t}a(B_s)\circ dB_s$$

となるから，$\widetilde{B}_{T_t}\stackrel{\mathrm{d}}{=}-B_{T_t}$ かつ $\widetilde{B}_{T_s}-\widetilde{B}_{T_t}\stackrel{\mathrm{d}}{=}B_{T_t-T_s}$ より

$$(f,\mathrm{U}_t g)=\int_{\mathbb{R}^d}dx\mathbb{E}^{x,0}_{P\times\nu}\left[\overline{f(B_{T_t})}e^{+i\int_0^{T_t}a(B_s)\circ dB_s}e^{-\int_0^t V(B_{T_t-T_s})ds}g(x)\right]$$

となる．さらに $T_t-T_s\stackrel{\mathrm{d}}{=}T_{t-s}\ (0\le s\le t)$ から

$$(f,\mathrm{U}_t g)=\int_{\mathbb{R}^d}dx\overline{\mathbb{E}^{x,0}_{P\times\nu}\left[f(B_{T_t})e^{-i\int_0^{T_t}a(B_s)\circ dB_s}e^{-\int_0^t V(B_{T_s})ds}\right]}g(x)=(\mathrm{U}_t f,g)$$

がわかる．よって U_t は対称である．$\mathrm{U}_t=e^{-tK^\Psi}$ となる自己共役作用素 K^Ψ の存在は Hille-Yoshida 定理による． **終り**

V は Ψ-Kato クラス で (A2) を仮定する．このとき K^Ψ を Ψ-Kato クラスポテンシャルをもった一般化されたシュレディンガー作用素とよぶ．K_0^Ψ は K^Ψ で $a=0$ としたものとして定義する．

定理 2.16 (L^p-L^q **有界性**) *V は Ψ-Kato クラス ポテンシャル で (A2) を仮定する．このとき e^{-tK^Ψ} は $L^p(\mathbb{R}^d)$ から $L^q(\mathbb{R}^d)$ $(1\le\forall p\le\forall q\le\infty)$ への有界作用素へ拡張できる．さらに $\|e^{-tK^\Psi}\|_{p,q}\le\|e^{-tK_0^\Psi}\|_{p,q}$ が成立する．*

[3] $Z\stackrel{\mathrm{d}}{=}Y$ は Z と Y が同分布をもつことを意味する．

[4] これは形式的な式変形である．$\int_0^{T_t}a(x+\widetilde{B}_s-\widetilde{B}_{T_t})\circ d\widetilde{B}_s$ の非積分関数が適合してないように見えるが，確率積分の定義に舞い戻って実は正当化できる．詳しくは [HIL09] を参照せよ．

証明: Riesz-Thorin 定理により e^{-tK^Ψ} が (1) $L^\infty(\mathbb{R}^d)\to L^\infty(\mathbb{R}^d)$, (2) $L^1(\mathbb{R}^d)\to L^1(\mathbb{R}^d)$, (3) $L^1(\mathbb{R}^d)\to L^\infty(\mathbb{R}^d)$ の有界作用素として拡張できることを示せば十分である.

$$|e^{-tK^\Psi}f(x)|\le e^{-tK_0^\Psi}|f|(x), \tag{2.15}$$

なので, (1)-(3) を $e^{-tK_0^\Psi}$ に対して示せばいい. 簡単のために $\mathbb{E}^{x,0}_{P\times\nu}=\mathbb{E}^x$, $\mathrm{P}_t=e^{-tK_0^\Psi}$, 即ち $\mathrm{P}_tf(x)=\mathbb{E}^x[e^{-\int_0^tV(X_s)ds}f(X_t)]$ とする. $f\in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ としよう. (2.14) により

$$\|\mathrm{P}_tf\|_\infty\le\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left(\mathbb{E}^x[e^{-\int_0^tV(X_s)ds}]\right)\|f\|_\infty$$

だから (1) が従う. 次に $0\le f\in L^1(\mathbb{R}^d)$, $g\equiv 1\in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ としよう. このとき $\mathrm{P}_tg\in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ となることは (1) からわかる. **定理** 2.15 の U_t の対称性の証明と同じようにして

$$\int_{\mathbb{R}^d}dxf(x)\cdot\mathrm{P}_tg(x)=\int_{\mathbb{R}^d}dx\mathrm{P}_tf(x)\cdot g(x)=\int_{\mathbb{R}^d}dx\mathrm{P}_tf(x)$$

が示せる. $\mathrm{P}_tf(x)\ge 0$ なので $\|\mathrm{P}_tf\|_1\le\|f\|_1\|\mathrm{P}_t1\|_\infty$ となる. 任意の $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ を $f=\Re f_+-\Re f_-+i(\Im f_+-\Im f_-)$ のように分ければ $\|\mathrm{P}_t\|_1\le 4\|f\|_1\|\mathrm{P}_t1\|_\infty$ となり (2) が示せた. (1) と (2) と Riesz-Thorin 定理により P_t が $L^p(\mathbb{R}^d)$ から $L^p(\mathbb{R}^d)$ への有界作用素となることがわかる. 最後に下図のダイアグラムに沿って (3) を示そう.

$$L^1(\mathbb{R}^d)\xrightarrow{\mathrm{P}_t}L^2(\mathbb{R}^d)\xrightarrow{\mathrm{P}_t}L^\infty(\mathbb{R}^d). \tag{2.16}$$

$f\in L^2(\mathbb{R}^d)$ とする. このとき

$$\|\mathrm{P}_tf\|_\infty^2\le\mathbb{E}^x[e^{-2\int_0^tV(X_s)ds}]\mathbb{E}^x[|f(X_t)|^2]\le C_t\int_{\mathbb{R}^d}dx|f(x+y)|^2p_t(y)dy$$

は (2.14) からわかる. ここで $C_t=\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\mathbb{E}^x[e^{-2\int_0^tV(X_s)ds}]$. また**仮定** 2.11 から $|p_t(y)|\le\int_0^\infty e^{-t\Psi(u^2/2)}du<\infty$ が従うので

$$\|\mathrm{P}_tf\|_\infty\le(C_t\|p_t\|_\infty)^{1/2}\|f\|_2 \tag{2.17}$$

がわかる. よって P_t は $L^2(\mathbb{R}^d)$ から $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ への有界作用素である. 次に $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ かつ $g\in L^2(\mathbb{R}^d)$ としよう. このとき $\int_{\mathbb{R}^d}dx\mathrm{P}_tf(x)\cdot g(x)=\int_{\mathbb{R}^d}dxf(x)\cdot\mathrm{P}_tg(x)$. よって (2.17) から

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d}dx\mathrm{P}_tf(x)\cdot g(x)\right|\le\|\mathrm{P}_tg\|_\infty\|f\|_1\le(C_t\|p_t\|_\infty)^{1/2}\|g\|_2\|f\|_1$$

をえる. $g\in L^2(\mathbb{R}^d)$ は任意なので $\mathrm{P}_tf\in L^2(\mathbb{R}^d)$ と

$$\|\mathrm{P}_tf\|_2\le(C_t\|p_t\|_\infty)^{1/2}\|f\|_1 \tag{2.18}$$

が従う. その結果, P_t は $L^1(\mathbb{R}^d)$ から $L^2(\mathbb{R}^d)$ への有界作用素になることがわかる. よってダイアグラム (2.16) が示せた. $(X_t)_{t\ge0}$ のマルコフ性から P_t が $L^p(\mathbb{R}^d)$ 上の半群になることもわかる. この半群性と (2.16) から $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ に対して,

$$\|\mathrm{P}_tf\|_\infty=\|\mathrm{P}_{t/2}\mathrm{P}_{t/2}f\|_\infty\le(C_{t/2}\|p_{t/2}\|_\infty)^{1/2}\|\mathrm{P}_{t/2}f\|_2\le C_{t/2}\|p_{t/2}\|_\infty\|f\|_1$$

となり, (3) が示せた. $\|e^{-tK^\Psi}\|_{p,q}\le\|e^{-tK_0^\Psi}\|_{p,q}$ は (2.15) からわかる. **終り**

2.4 相対論的シュレディンガー作用素・スピンなし

相対論的 シュレディンガー作用素を考えよう：

$$h_{\mathrm{rel}} = \sqrt{(\mathrm{p}-a)^2+m^2}-m, \tag{2.19}$$
$$h_{\mathrm{rel}}(0) = \sqrt{\mathrm{p}^2+m^2}-m. \tag{2.20}$$

前章の一般論の帰結として次がいえる．

定理 2.17 *(A3) を仮定し V は $\sqrt{\mathrm{p}^2+m^2}$ に相対有界でその相対閾値は真に 1 より小さいとする．このとき h_{rel} は $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 上本質的自己共役で*

$$(f, e^{-th_{\mathrm{rel}}}g) = \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}^{x,0}_{P\times\nu}\left[\overline{f(B_0)}g(B_{T_t^\Psi})e^{-i\int_0^{T_t^\Psi} a(B_s)\circ dB_s}e^{-\int_0^t V(B_{T_s^\Psi})ds}\right] \tag{2.21}$$

が成立する．ここで $T_t^\Psi = \inf\{s>0|B_s+ms=t\}$ である．

定理 2.17 より次のエネルギー不等式をえる．

系 2.18 (双極不等式) 定理 *2.17 の条件を仮定する．このとき*

$$|(f, e^{-th_{\mathrm{rel}}}g)| \le (|f|, e^{-th_{\mathrm{rel}}(0)}|g|).$$

特に $\mathcal{E}[h_{\mathrm{rel}}(0)] \le \mathcal{E}[h_{\mathrm{rel}}]$ が成立する．

また**定理** 2.16 から次の結果もえる．

系 2.19 ($L^p - L^q$ 有界性) 定理 *2.17 の条件と $\Psi(u)=\sqrt{2u+m^2}-m$ とおいて* **命題** *2.13 (1)-(3) の一つを仮定する．このとき $e^{-th_{\mathrm{rel}}}$ は $L^p(\mathbb{R}^d)$ から $L^q(\mathbb{R}^d)$ $(1\le \forall p \le \forall q \le \infty)$ への有界作用素へ拡張できる．*

3 経路積分表示・スピンあり

3.1 一般化されたシュレディンガー作用素・スピンあり

ここからがこの報告の本題である．とは言っても本質的なことは前章で紹介済みである．スピン 1/2 をもったシュレディンガー作用素は形式的に $L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^2)$ 上に次で定義される：

$$h_{1/2} = \frac{1}{2}(\sigma\cdot(\mathrm{p}-a))^2. \tag{3.1}$$

これを前章と同様に 2 次形式で一般的かつ正確に定義しよう．次の Pauli 行列を固定する：

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2 次形式 $q_{1/2}$ を次で定める：

$$q_{1/2}(f,g) = \sum_{\mu=1}^3 (\sigma_\mu \mathrm{D}_\mu f, \sigma_\mu \mathrm{D}_\mu g). \tag{3.2}$$

定義域は

$$Q(q_{1/2}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^2) \,|\, \sigma_\mu \mathrm{D}_\mu f \in L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^2),\ \mu = 1,2,3\}.$$

(A1) を仮定する．このとき $q_{1/2}$ は非負な閉 2 次形式になるので，次を満たす自己共役作用素 $h_{1/2}$ がただ一つ存在する：

$$(h_{1/2}f, g) = q_{1/2}(f,g), \quad f \in D(h_{1/2}),\ g \in Q(q_{1/2}). \tag{3.3}$$

ここで

$$D(h_{1/2}) = \left\{f \in Q(q_{1/2}) \,|\, q_{1/2}(f,\cdot) \in L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^2)'\right\}. \tag{3.4}$$

命題 3.1 **(1)** *(A1)* を仮定する．$d=3$ のとき $\mathbb{C}^2 \otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ は $h_{1/2}$ の *2* 次形式の意味での芯である．

(2) *(A4)* を仮定する．このとき $\mathbb{C}^2 \otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ は $h_{1/2}$ の芯である．

(3) *(A1)* を仮定する．$\Psi \in \mathcal{B}_0$ としよう．$d=3$ のとき $\mathbb{C}^2 \otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ は $\Psi(h_{1/2})$ の *2* 次形式の意味での芯である．

(4) *(A4)*を仮定する．$\Psi \in \mathcal{B}_0$ としよう．このとき $\mathbb{C}^2 \otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ は $\Psi(h_{1/2})$ の芯である．

$h_{1/2}$ はベクトル値関数空間上に作用する自己共役作用素なので，例えば $h_{1/2}+V$ が生成する熱半群の経路積分表示をトロッタ積公式を用いて直接求めても，積分核はもちろん 2×2 行列の無限積のようなものになり，あまり興味がわかない．そこで $h_{1/2}$ をスカラー値関数へ作用する自己共役作用素として実現する方法を考える．このアイデアは [ALS83] による．以下の議論でわかるように，これは 2 次元 Dirac 作用素にも応用可能である．ただし 2 次元という特殊事情を存分に使っているので時空 4 次元の Dirac 作用素のような模型に直ちに拡張出来るかどうかは自明ではない．

さて，経路積分表示のために $h_{1/2}$ を $L^2(\mathbb{R}^3\times\mathbb{Z}_2)$ 上の作用素へユニタリー変換する．$L^2(\mathbb{R}^3\times\mathbb{Z}_2)$ は $x\in\mathbb{R}^3$ とスピン変数 $\theta\in\mathbb{Z}_2$ 上の L^2-関数空間である．ここで

$$\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\} = \{\theta_1, \theta_2\}. \tag{3.5}$$

$L^2(\mathbb{R}^3\times\mathbb{Z}_2)$ 上に作用する作用素 $h_{\mathbb{Z}_2}$ を次で定める：

$$(h_{\mathbb{Z}_2}f)(x,\theta) = (hf)(x,\theta) - \frac{1}{2}\theta b_3(x) f(x,\theta) - \frac{1}{2}\Big(b_1(x) - i\theta b_2(x)\Big) f(x,-\theta). \tag{3.6}$$

ここで $(b_1,b_2,b_3) = \nabla\times a$. 可閉作用素 $h_{\mathbb{Z}_2}\lceil_{\mathbb{C}^2\otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^3)}$ の閉拡大も同じ記号で書くことにする．ユニタリー作用素

$$\mathrm{F}: L^2(\mathbb{R}^3\times\mathbb{Z}_2) \to \mathbb{C}^2\otimes L^2(\mathbb{R}^3) \cong L^2(\mathbb{R}^3)\oplus L^2(\mathbb{R}^3) \tag{3.7}$$

を次で定義する：

$$\mathrm{F}f = \begin{bmatrix} f(\cdot,+1) \\ f(\cdot,-1) \end{bmatrix}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^3\times\mathbb{Z}_2). \tag{3.8}$$

命題 3.2 *(A4)*を仮定する．このとき $h_{\mathbb{Z}_2}$ は $\ell^2(\mathbb{Z}_2)\otimes D(h)$ 上で自己共役作用素で $\ell^2(\mathbb{Z}_2)\otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 上で本質的自己共役作用素になる．さらに $Fh_{1/2}\mathrm{F}^{-1} = h_{\mathbb{Z}_2}$ が従う．

証明: $\mathrm{F}h_{1/2}\mathrm{F}^{-1} = h_{\mathbb{Z}_2}$ が $\ell^2(\mathbb{Z}_2)\otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 上で成立することは即座にわかる．F は $\ell^2(\mathbb{Z}_2)\otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ を $\mathbb{C}^2\otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ へ写し，$\mathbb{C}^2\otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ は $h_{1/2}$ の作用素としての芯なので $\mathrm{F}h_{1/2}\mathrm{F}^{-1} = h_{\mathbb{Z}_2}$ が成立する． **終り**

$h_{\mathbb{Z}_2}$ を 3 次元から d 次元へ，また $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_p$ へ一般化する．$\mathbb{Z}_p$ を 1 の原始 p 乗根の集合とする：

$$\mathbb{Z}_p = \{\theta_1^{(p)}, ..., \theta_p^{(p)}\}. \tag{3.9}$$

ここで $\theta_\alpha^{(p)} = \exp\left(2\pi i\frac{\alpha}{p}\right)$, $\alpha\in\mathbb{N}$. 以下で $p\geq 2$ を固定し $\theta_\beta^{(p)}$ を簡単に θ_β と書くことにする．$\ell^2(\mathbb{Z}_p) = \{f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}\}$ にスカラー積 $(f,g)_{\ell^2(\mathbb{Z}_p)} = \sum_{\beta=1}^p \overline{f(\theta_\beta)}g(\theta_\beta)$ を導入する．

スピン $\mathbb{Z}_p$ をもったシュレディンガー作用素 を定義しよう．始めに対角部分 U と非対角部分 U_β, $\beta = 1, ..., p-1$, を定義する．

定義 3.3 (一般化されたスピン作用素)

(1) (対角部分) $U : \mathbb{R}^d \times \mathbb{Z}_p \to \mathbb{R}$ は $\max_{\theta\in\mathbb{Z}_p}|U(x,\theta)|$ が $\frac{1}{2}\mathrm{p}^2$ に相対有界な掛け算作用素になるものとする．

(2) (非対角部分) $W_\beta : \mathbb{R}^d \times \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}$, $1\leq\beta\leq p-1$, は $\max_{\theta\in\mathbb{Z}_p}|W_\beta(x,\theta)|$ が $\frac{1}{2}\mathrm{p}^2$ に相対有界となる掛け算作用素になるものとする．$U_\beta : \mathbb{R}^d\times\mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}$ を次で定める：

$$U_\beta(x,\theta_\alpha) = \frac{1}{2}\left(W_\beta(x,\theta_{\alpha+\beta}) + \overline{W_{p-\beta}(x,\theta_\alpha)}\right), \quad \alpha = 1,...,p,\ \beta = 1,...,p-1. \tag{3.10}$$

(3) (一般化されたスピン作用素) $M_{\mathbb{Z}_p} : L^2(\mathbb{R}^d\times\mathbb{Z}_p) \to L^2(\mathbb{R}^d\times\mathbb{Z}_p)$,

$$M_{\mathbb{Z}_p} : f(x,\theta_\alpha) \mapsto U(x,\theta_\alpha)f(x,\theta_\alpha) + \sum_{\beta=1}^{p-1} U_\beta(x,\theta_\alpha)f(x,\theta_{\alpha+\beta}) \tag{3.11}$$

を一般化されたスピン作用素 とよぶ．

以下で

$$u_\beta(x) = \begin{cases} \max_{\theta\in\mathbb{Z}_p}|U(x,\theta)| & \text{if } \beta = p, \\ \max_{\theta\in\mathbb{Z}_p}|U_\beta(x,\theta)| & \text{if } 1\leq\beta\leq p-1 \end{cases} \tag{3.12}$$

とおく．明らかに

$$\|u_\beta f\| \leq c_\beta\|\frac{1}{2}\mathrm{p}^2 f\| + b_\beta\|f\|, \quad \beta = 1,...,p, \quad f\in D((1/2)\mathrm{p}^2), \tag{3.13}$$

となる $c_\beta > 0$ と $b_\beta \geq 0$ が存在する．

例 3.4 (スピン 1/2) $d = 3$, $p = 2$ として $W_1(x,\theta) = -\frac{1}{2}(b_1(x) + i\theta b_2(x))$, $\theta\in\mathbb{Z}_2$ と定めれば $\theta_1 = -1$, $\theta_2 = 1$ となり，また (3.10) から非対角部分は

$$U_1(x,\theta) = \frac{1}{2}(W_1(x,\theta\theta_1) + \overline{W_1(x,\theta)}), \quad \theta\in\mathbb{Z}_2$$

がわかる．また $W_1(x,\theta\theta_1) = -\frac{1}{2}(b_1(x) - i\theta b_2(x)) = \overline{W_1(x,\theta)}$ となるので非対角部分は $U_1(x,\theta) = -\frac{1}{2}(b_1(x) - i\theta b_2(x))$ となる．一方で対角部分は $U(x,\theta) = -\frac{1}{2}\theta b_3(x)$ である．これはまさに (3.6) で与えたものに他ならない．

(A1) を仮定する．h は (2.2) で定義されたシュレディンガー作用素．このとき

$$h_{\mathbb{Z}_p} = 1 \otimes h + M_{\mathbb{Z}_p} \tag{3.14}$$

とおく．形式的に

$$(h_{\mathbb{Z}_p} f)(x, \theta_\alpha) = \left(\frac{1}{2}(\mathrm{p} - a(x))^2 + U(x, \theta_\alpha)\right) f(x, \theta_\alpha) + \sum_{\beta=1}^{p-1} U_\beta(x, \theta_\alpha) f(x, \theta_{\alpha+\beta}) \tag{3.15}$$

となる．以下では U, U_β を一つ固定する．

定理 3.5 *(A2)* を仮定する．$\sum_{\beta=1}^{p} c_\beta < 1$ としよう．ここで c_β は *(3.13)* で与えられる定数である．このとき $h_{\mathbb{Z}_p}$ は $\ell^2(\mathbb{Z}_p) \otimes D(h)$ 上で自己共役 で下から有界である．さらに $1 \otimes h$ の任意の芯上で本質的自己共役 である．とくに $\ell^2(\mathbb{Z}_p) \otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ は $h_{\mathbb{Z}_p}$ の芯である．

証明:

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \overline{g(x, \theta_\alpha)} \left(\sum_{\beta=1}^{p-1} W_\beta(x, \theta_{\alpha+\beta}) f(x, \theta_{\alpha+\beta}) \right) = \sum_{\gamma=1}^{p} \left(\sum_{\beta=1}^{p-1} \overline{W_{p-\beta}(x, \theta_\gamma) g(x, \theta_{\gamma+\beta})} \right) f(x, \theta_\gamma)$$

なので，

$$(g(x, \cdot), M_{\mathbb{Z}_p} f(x, \cdot))_{\ell^2(\mathbb{Z}_p)} = (M_{\mathbb{Z}_p} g(x, \cdot), f(x, \cdot))_{\ell^2(\mathbb{Z}_p)}$$

が従い，$M_{\mathbb{Z}_p}$ は対称になる．そのノルムは $\|M_{\mathbb{Z}_p} f\| \le \sum_{\beta=1}^{p} \|(1 \otimes u_\beta) f\|$ のように評価できるから $h_0 = \frac{1}{2}\mathrm{p}^2$，$E > 0$ とおいて $\|u_\beta (h+E)^{-1} g\| \le \|u_\beta (h_0 + E)^{-1} |g|\|$ から[5]

$$\|M_{\mathbb{Z}_p} f\| \le \sum_{\beta=1}^{p} \|u_\beta (h_0 + E)^{-1}\| \|1 \otimes (h+E) f\| \le \sum_{\beta=1}^{p} c_\beta \|(1 \otimes h) f\| + b\|f\|$$

が従う．故に Kato-Rellich 定理より定理が従う． **終り**

定義 3.6 (一般化されたシュレディンガー作用素) (A2) を仮定する．さらに $\sum_{\beta=1}^{p} c_\beta < 1$ としよう．$\Psi \in \mathcal{B}_0$ とし

$$\overline{h_{\mathbb{Z}_p}} = \begin{cases} h_{\mathbb{Z}_p} & \text{if } \mathcal{E}\left[h_{\mathbb{Z}_p}\right] \ge 0, \\ \\ h_{\mathbb{Z}_p} - \mathcal{E}\left[h_{\mathbb{Z}_p}\right] & \text{if } \mathcal{E}\left[h_{\mathbb{Z}_p}\right] < 0 \end{cases} \tag{3.16}$$

とおく．このとき

$$H_{\mathbb{Z}_p}^{\Psi} = \Psi\left(\overline{h_{\mathbb{Z}_p}}\right) + V \tag{3.17}$$

を一般化されたシュレディンガー作用素という．

Ψ は $\mathbb{R}_+$ 上で定義された関数なので $\Psi(h_{\mathbb{Z}_p})$ は一般に定義されない．そこで $\Psi\left(\overline{h_{\mathbb{Z}_p}}\right)$ とした．

命題 3.7 *(A2)* を仮定し $\sum_{\beta=1}^{p} c_\beta < 1$ とする．もし $\Psi \in \mathcal{B}_0$ ならば，$\ell^2(\mathbb{Z}_p) \otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ は $\Psi(\overline{h_{\mathbb{Z}_p}})$ の芯である．

証明: $h_{\mathbb{Z}_p}$ は $\ell^2(\mathbb{Z}_p) \otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 上で本質的自己共役なので，この命題は**命題** 2.3 と同様に示せる． **終り**

---

[5] この不等式は FK 公式から導かれるため，条件 (A2) が必要になる．(3.40) を見よ．

3.2 FK 公式・スピンあり

ここでは $H_{\mathbb{Z}_p}^{\Psi}$ が生成する熱半群の経路積分表示を構成する．そのために $p-1$ 個の独立なポアソン過程を用意する．$(N_t^\beta)_{t\geq 0}$, $\beta = 1, ..., p-1$, は $(\Omega_N, \mathcal{F}_N, \mu)$ 上の $p-1$ 個の独立なポアソン過程で intensity 1 をもつとする．即ち

$$\mu(N_t^\beta = n) = e^{-t}t^n/n!.$$

確率過程 $(N_t)_{t\geq 0}$ を

$$N_t = \sum_{\beta=1}^{p-1} \beta N_t^\beta \tag{3.18}$$

によって定める．$\mathcal{F}_t^N = \sigma(N_t, t \leq s)$ とする．このとき N_t は Lévy 過程なのでもちろん $\mathcal{F}_t^N$ に関してマルコフ過程である．$\mathbb{E}_\mu[f(N_t + \alpha)]$ を $\mathbb{E}_\mu^\alpha[f(N_t)]$ と書こう．また

$$\int_v^{w+} g(N_{s-})dN_s^\beta = \sum_{\substack{v\leq r\leq w \\ N_{r+}^\beta \neq N_{r-}^\beta}} g(N_{r-}) \tag{3.19}$$

と定義する．即座に $\mathbb{E}_\mu\left[\int_v^{w+} g(N_{s-})dN_s^\beta\right] = \mathbb{E}_\mu\left[\int_v^w g(N_s)ds\right]$ がわかる．

補題 3.8 $\sum_{\beta=1}^p c_\beta < 1$ とする．*(A2)* を仮定し

$$\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} dy (2\pi s)^{-d/2} e^{-|x-y|^2/(2s)} |\log u_\beta(y)| < \infty, \quad \beta = 1, ..., p-1, \tag{3.20}$$

としよう．このとき

$$(f, e^{-th_{\mathbb{Z}_p}} g) = e^{(p-1)t} \sum_{\alpha=1}^p \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_{P\times\mu}^{x,\alpha}\left[\overline{f(B_0, \theta_{N_0})} g(B_t, \theta_{N_t}) e^{\mathrm{S}}\right] \tag{3.21}$$

が従う．ただし $\mathrm{S} = \mathrm{S}_a + \mathrm{S}_{\mathrm{spin}}$ で，

$$\mathrm{S}_a = -i \int_0^t a(B_s) \circ dB_s,$$
$$\mathrm{S}_{\mathrm{spin}} = -\int_0^t U(B_s, \theta_{N_s})ds + \sum_{\beta=1}^{p-1} \int_0^{t+} \log(-U_\beta(B_s, \theta_{N_{s-}}))dN_s^\beta.$$

ここで $\log z$ は主値をとるものと約束する．

証明: (Step 1) $U(x, \theta_\alpha)$ と $U_\beta(x, \theta_\alpha)$ が連続であると仮定する．さらに $a \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^d))^d$ としよう．(3.20) から

$$\mathbb{E}_{P\times\mu}^{x,\alpha}\left[\int_0^{t+} |\log(-U_\beta(B_s, \theta_{N_{s-}}))| dN_s^\beta\right] \leq \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{-|x-y|^2/(2s)}}{(2\pi s)^{d/2}} |\log u_\beta(y)| < \infty$$

が従うので

$$\int_0^{t+} |\log(-U_\beta(B_s, \theta_{N_{s-}}))| dN_s^\beta < \infty \tag{3.22}$$

がいえる．等式

$$\int_{\Omega_0} \exp\left(\sum_{\beta=1}^{p-1} r_\beta N_t^\beta\right) d\mu = \exp\left(\sum_{\beta=1}^{p-1}(e^{r_\beta}-1)\right)$$

と $|c\mathrm{S}_{\mathrm{spin}}| \le c\|u_p\|_\infty t + |\log\|u_\beta\|_\infty^c| N_t^\beta$ の評価から

$$\left|\mathbb{E}_{P\times\mu}^{x,\alpha}[e^{c\mathrm{S}_{\mathrm{spin}}}]\right| \le \exp\left(t\left(c\|u_p\|_\infty + \sum_{\beta=1}^{p-1}(\|u_\beta\|_\infty^c - 1)\right)\right). \tag{3.23}$$

ここで u_β は (3.12) で与えられる．

$$Z_{[v,w]} = -i\int_v^w a(B_s)\circ dB_s - \int_v^w U(B_s,\theta_{N_s})ds + \sum_{\beta=1}^{p-1}\int_v^{w+}\log(-U_\beta(B_s,\theta_{N_{s-}}))dN_s^\beta$$

とすれば

$$\mathrm{P}_t g(x,\theta_\alpha) = \mathbb{E}_{P\times\mu}^{x,\alpha}\left[e^{Z_{[0,t]}}g(B_t,\theta_{N_t})\right]$$

と表せる．$g\in\ell^2(\mathbb{Z}_p)\otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ とする．シュワルツの不等式から

$$\|\mathrm{P}_t g\|^2 \le \exp\left(t\left(2\|u_p\|_\infty + \sum_{\beta=1}^{p-1}(\|u_\beta\|_\infty^2 - 1)\right)\right)\|g\|^2$$

をえる．よって P_t は有界作用素であることがわかる．次に $\{\mathrm{P}_t\}_{t\ge0}$ が強連続な 1-パラメター対称半群であり，その生成子が $-(h_{\mathbb{Z}_p}+p-1)$ となることを示そう．即ち (1) $\mathrm{P}_0 = I$, (2) $\mathrm{P}_s\mathrm{P}_t = \mathrm{P}_{s+t}$, (3) $\mathrm{P}_t g$ は t に関して連続，(4) $\lim_{t\to0}\frac{1}{t}(\mathrm{P}_t g - g) = -(h_{\mathbb{Z}_p}+(p-1))g$. (1) は自明．(2) を示そう．

$$\mathrm{P}_t\mathrm{P}_s g(x,\theta_\alpha) = \mathbb{E}_{P\times\mu}^{x,\alpha}\left[e^{Z_{[0,t]}}\mathbb{E}_{P\times\mu}^{B_t,N_t}\left[e^{Z_{[0,s]}}g(B_s,\theta_{N_s})\right]\right] \tag{3.24}$$

に注意する．ブラウン運動のマルコフ性から

$$\begin{aligned}(3.24) = \mathbb{E}_{P\times\mu}^{x,\alpha}&\left[e^{Z_{[0,t]}}\exp\left(-i\int_t^{t+s}a(B_r)\circ dB_r\right)\right.\\ \mathbb{E}_\mu^{N_t}&\left.\left[\exp\left(-\int_0^s U(B_{t+r},\theta_{N_r})dr + \sum_{\beta=1}^{p-1}\int_0^{s+}\log(-U_\beta(B_{t+r-},\theta_{N_{r-}}))dN_r^\beta\right)g(B_{t+s},\theta_{N_s})\right]\right]\end{aligned} \tag{3.25}$$

となる．さらに N_t のマルコフ性から

$$(3.25) = \mathbb{E}_{P\times\mu}^{x,\alpha}\left[e^{Z_{[0,t]}}e^{Z_{[t,t+s]}}g(B_{t+s},\theta_{N_{t+s}})\right] = \mathrm{P}_{s+t}g(x,\theta_\alpha)$$

もいえる．これで (2) が示された．次に P_t の生成子を求める．Itô の公式[6] によって次が示せる：

$$
\begin{aligned}
dN_t &= \sum_{\beta=1}^{p-1}\int_0^{t+}\beta dN_s^\beta, \quad d\theta_{N_t} = \sum_{\beta=1}^{p-1}(\theta_{N_t+\beta}-\theta_{N_t}),\\
dg(B_t,\theta_{N_t}) &= \int_0^t \nabla g(B_s,\theta_{N_s})\cdot dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta g(B_s,\theta_{N_s})ds\\
&\quad +\sum_{\beta=1}^{p-1}\int_0^{t+}(g(B_s,\theta_{N_s+\beta})-g(B_s,\theta_{N_s}))dN_s^\beta,\\
de^{Z[0,t]} &= \int_0^t e^{Z[0,s]}(-ia(B_s))\cdot dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t e^{Z[0,s]}(-i\nabla\cdot a(B_s)-a(B_s)^2)ds\\
&\quad -\int_0^t e^{Z[0,s]}U(B_s,\theta_{N_s})ds + \sum_{\beta=1}^{p-1}\int_0^{t+} e^{Z[0,s-]}\left(e^{\log(-U_\beta(B_s,\theta_{N_{s-}}))}-1\right)dN_s^\beta.
\end{aligned}
$$

また積公式 [7] $d\left(e^{Z[0,t]}g\right) = de^{Z[0,t]}\cdot g + e^{Z[0,t]}\cdot dg + de^{Z[0,t]}\cdot dg$ から

$$
\begin{aligned}
d\left(e^{Z[0,t]}g\right)(B_t,\theta_{N_t}) = \int_0^t e^{Z[0,s]}\Big\{&\frac{1}{2}\Delta g(B_s,\theta_{N_s}) - ia(B_s)\cdot\nabla g(B_s,\theta_{N_s})\\
&+\left(-\frac{1}{2}a(B_s)^2 - U(B_s,\theta_{N_s})\right)g(B_s,\theta_{N_s})\Big\}ds\\
+\int_0^t e^{Z[0,s]}&\left(\nabla g(B_s,\theta_{N_s}) - ia(B_s)g(B_s,\theta_{N_s})\right)\cdot dB_s\\
+\sum_{\beta=1}^{p-1}\int_0^{t+} e^{Z[0,s]}&\left(g(B_s,\theta_{N_{s-}+\beta})e^{\log(-U_\beta(B_s,\theta_{N_{s-}}))} - g(B_s,\theta_{N_{s-}})\right)dN_s^\beta.
\end{aligned}
$$

上の両辺の期待値をとれば

$$
\frac{1}{t}(f,(\mathrm{P}_t-1)g) = \frac{1}{t}\int_0^t ds\int_{\mathbb{R}^d} dx\overline{f(x)}\mathbb{E}_{P\times\mu}^{x,\alpha}\left[G(s)\right]
$$

[6] $\mathcal{F}_t = \sigma((B_s,N_s^\beta), 0\le s\le t, \beta=1,\ldots,p)$ とする．次を考える

$$
L_t^i = \int_0^t f^i(s,\omega)ds + \int g^i(s,\omega)\cdot dB_s + \sum_{\beta=1}^{p-1}\int_0^{t+} h_\beta^i(s,\omega)dN_s^\beta, \quad i=1,\ldots,n.
$$

ここで $f^i(\cdot,\omega)\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ a.s, $g^i\in\mathcal{E}_{\mathrm{loc}}$．そして $h_\beta^i(s,\omega)$ は $\mathcal{F}_t$ に関して適合していて，s について左連続で $\int_0^{t+}|h_\beta^i(s,\omega)|dN_s^\beta<\infty$ a.s. $F\in C^2(\mathbb{R}^n)$ のとき

$$
\begin{aligned}
dF(L_t) &= \sum_{i=1}^n\int_0^t F_i(L_s)f^i(s)ds + \sum_{i,j=1}^n\int_0^t\frac{1}{2}F_{ij}(L_s)g^i(s)\cdot g^j(s)ds\\
&\quad +\sum_{i=1}^n\int_0^t F_i(L_s)g^i(s)\cdot dB_s + \sum_{\beta=1}^{p-1}\int_0^{t+}(F(L_{s-}+h_\beta(s))-F(L_{s-}))dN_s^\beta
\end{aligned}
$$

となる．ここで $F_i=\partial_i F$, $F_{ij}=\partial_i\partial_j F$.

[7] $(L_t)_{t\ge0}$ と $(M_t)_{t\ge0}$ は 2 つの確率過程．このとき $d(L_tM_t) = dL_t\cdot M_t + L_t\cdot dM_t + dL_t\cdot dM_t$, は規則 $dtdt=0$, $dB_t^\mu dt=0$, $dB_t^\mu dB_t^\nu=\delta_{\mu\nu}dt$, $dN_t^\alpha dN_t^\beta=0$, $dN_t^\alpha dt=0$, $dN_t^\alpha dB_t=0$ によって計算してもいい．

となる．ここで

$$G(s) = e^{Z_{[0,s]}}\left(\frac{1}{2}\Delta - ia(B_s)\cdot\nabla - \frac{1}{2}a(B_s)^2 - U(B_s,\theta_{N_s})\right)g(B_s,\theta_{N_s})$$
$$+\sum_{\beta=1}^{p-1} e^{Z_{[0,s]}}\left(g(B_s,\theta_{N_s+\beta})e^{\log(-U_\beta(B_s,\theta_{N_s}))} - g(B_s,\theta_{N_{s-}})\right),$$
$$G(0) = -(h_{\mathbb{Z}_p} + (p-1))g(x,\theta_\alpha).$$

$U(x,\theta)$, $U_\beta(x,\theta)$, $a_\mu(x)$ は連続であることに気をつければ $G(s)$ も s $=0$ で $(\omega,\tau)\in\Omega_P\times\Omega_N$ ごとに連続．そして $\mathbb{E}^{x,\alpha}_{P\times\mu}[G(s)]$ は $s=0$ で連続となることが優収束定理から示せる．故に

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f,(\mathrm{P}_t-1)g) = (f,-(h_{\mathbb{Z}_p}+(p-1))g)$$

が従う．最後に強連続性 (3) が (2) と (4) から示せる．その結果

$$e^{t(p-1)}\mathrm{P}_t g = e^{-th_{\mathbb{Z}_p}}g \tag{3.26}$$

がわかる．

(Step 2) **命題** 2.5 の証明と同様の近似議論で (3.26) は (A2) に従う a まで拡張できる．

(Step 3) (3.26) を一般の U と U_β へ拡張する．軟化子をもちいて $U_\beta^{(n)}(x,\theta_\alpha)$ と $U^{(n)}(x,\theta_\alpha)$, $n=1,2,3,...$, が連続で $U_\beta(x,\theta_\alpha)$, $U(x,\theta_\alpha)$ に $n\to\infty$ で x ごとにに収束し，さらに $\|U^{(n)}(\cdot,\theta_\alpha)\|_\infty \le \|U(\cdot,\theta_\alpha)\|_\infty$ かつ $\|U_\beta^{(n)}(\cdot,\theta_\alpha)\|_\infty \le \|U_\beta(\cdot,\theta_\alpha)\|_\infty$ となるものを構成できる．固定した $\tau\in\Omega_N$ ごとに次を満たす $r_1=r_1(\tau),...,r_M=r_M(\tau)$ が存在する：

$$\exp\left(\sum_{\beta=1}^{p-1}\int_0^{t+}\log(-U_\beta(B_s,\theta_{N_{s-}}))dN_s^\beta\right) = \prod_{\beta=1}^{p-1}\prod_{i=1}^{M}(-U_\beta(B_{r_i},\theta_{N_{r_i}})). \tag{3.27}$$

よって $\tau\in\Omega_N$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} e^{\sum_{\beta=1}^{p-1}\int_0^{t+}\log(-U_\beta^{(n)}(B_s,\theta_{N_{s-}}))dN_s^\beta} = e^{\sum_{\beta=1}^{p-1}\int_0^{t+}\log(-U_\beta(B_s,\theta_{N_{s-}}))dN_s^\beta}.$$

同様にして $e^{-\int_0^t U^{(n)}(B_s,\theta_{N_s})ds}\to e^{-\int_0^t U(B_s,\theta_{N_s})ds}$ $(n\to\infty)$ も示せる．故に (3.26) が 一般の U_β と U に対して従う． **終り**

定理 3.9 (FK公式) $\Psi\in\mathcal{B}_0$ としよう．T_t^Ψ の $\mathbb{R}$ 上の分布を $\rho(r,t)$ とする．$u_\beta\in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\beta=1,...,p$, $V\in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ とし，*(A2)* を仮定する．さらに

$$\int_{\mathbb{R}} dr\rho(r,t)\int_0^r ds\int_{\mathbb{R}^d} dy(2\pi s)^{-d/2}e^{-|x-y|^2/(2s)}|\log u_\beta(y)| < \infty,\quad \beta=1,...,p-1 \tag{3.28}$$

が成立しているとする．このとき

$$(f,e^{-tH^\Psi_{\mathbb{Z}_p}}g) = \sum_{\alpha=1}^{p}\int_{\mathbb{R}^d}dx\mathbb{E}^{x,\alpha,0}_{P\times\mu\times\nu}\left[e^{(p-1)T_t^\Psi}\overline{f(B_0,\theta_{N_0})}g(B_{T_t^\Psi},\theta_{N_{T_t^\Psi}})e^{\mathrm{S}^\Psi}\right]. \tag{3.29}$$

ここで $\mathrm{S}^\Psi = \mathrm{S}_V^\Psi + \mathrm{S}_a^\Psi + \mathrm{S}_{\mathrm{spin}}^\Psi$ は

$$\mathrm{S}_V^\Psi = -\int_0^t V(B_{T_s^\Psi})ds,$$
$$\mathrm{S}_a^\Psi = -i\int_0^{T_t^\Psi} a(B_s)\circ dB_s,$$
$$\mathrm{S}_{\mathrm{spin}}^\Psi = \begin{cases} -\displaystyle\int_0^{T_t^\Psi}\Big(U(B_s,\theta_{N_s}) - \mathcal{E}\left[h_{\mathbb{Z}_p}\right]\Big)ds + \sum_{\beta=1}^{p-1}\int_0^{T_t^\Psi+}\log(-U_\beta(B_s,\theta_{N_{s-}}))dN_s^\beta \\ \hfill \text{if } \mathcal{E}\left[h_{\mathbb{Z}_p}\right]<0, \\ -\displaystyle\int_0^{T_t^\Psi}\Big(U(B_s,\theta_{N_s})\Big)ds + \sum_{\beta=1}^{p-1}\int_0^{T_t^\Psi+}\log(-U_\beta(B_s,\theta_{N_{s-}}))dN_s^\beta \\ \hfill \text{if } \mathcal{E}\left[h_{\mathbb{Z}_p}\right]\geq 0. \end{cases}$$

証明: (3.28) から

$$\mathbb{E}_{P\times\mu\times\nu}^{x,\alpha,0}\left[\int_0^{T_t^\Psi}|\log(-U_\beta(B_s,\theta_{N_{s-}}))|dN_s^\beta\right]$$
$$\leq \int\rho(r,t)dr\int_0^r ds\int_{\mathbb{R}^d}\frac{e^{-|x-y|^2/(2s)}}{(2\pi s)^{d/2}}|\log u_\beta(y)|<\infty$$

が従うので

$$\int_0^{T_t^\Psi+}|\log(-U_\beta(B_s,\theta_{N_{s-}}))|dN_s^\beta<\infty \tag{3.30}$$

であることに注意しよう．**補題** 3.8 から

$$\left(f, e^{-t\Psi(\overline{h_{\mathbb{Z}_p}})}g\right) = \sum_{\alpha=1}^p\int_{\mathbb{R}^d}dx\mathbb{E}_{P\times\mu\times\nu}^{x,\alpha,0}\left[e^{(p-1)T_t^\Psi}\overline{f(B_0,\theta_{N_0})}g(B_{T_t^\Psi},\theta_{N_{T_t^\Psi}})e^{\mathrm{S}_a^\Psi+\mathrm{S}_{\mathrm{spin}}^\Psi}\right]. \tag{3.31}$$

$0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t$ に対して

$$\left(f_0, \prod_{j=1}^n e^{-(t_j-t_{j-1})\Psi(\overline{h_{\mathbb{Z}_p}})}f_j\right)$$
$$=\sum_{\alpha=1}^p\int_{\mathbb{R}^d}dx\mathbb{E}_{P\times\mu\times\nu}^{x,\alpha,0}\left[e^{(p-1)T_t^\Psi}\overline{f_0(B_0,\theta_{N_0})}\left(\prod_{j=1}^n f_j(B_{T_{t_j}^\Psi},\theta_{N_{T_{t_j}^\Psi}})\right)e^{\mathrm{S}_a^\Psi+\mathrm{S}_{\mathrm{spin}}^\Psi}\right] \tag{3.32}$$

となる．これは**定理** 2.6 (Step 2) の証明と同様にして示せる．V を連続としよう．トロッタ積公式と (3.32) により

$$\begin{aligned}\left(f, e^{-tH_{\mathbb{Z}_p}^\Psi}g\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(f, \left(e^{-(t/n)\Psi(h_{\mathbb{Z}_p})}e^{-(t/n)V}\right)^n g\right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^p\int_{\mathbb{R}^d}dx\mathbb{E}_{P\times\mu\times\nu}^{x,\alpha,0}\left[e^{(p-1)T_t^\Psi}\overline{f(B_0,\theta_{N_0})}g\left(B_{T_t^\Psi},\theta_{N_{T_t^\Psi}}\right)e^{\mathrm{S}^\Psi}\right]\end{aligned}$$

となるから定理は連続な V に対して成立する．$V\in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ までの拡張は容易である．
終り

$h^0_{\mathbb{Z}_p}$ を $h_{\mathbb{Z}_p}$ で a と U_β を各々 0 と $|U_\beta|$ に置き換えたものとして定義する．即ち

$$\left(h^0_{\mathbb{Z}_p}f\right)(x,\theta_\alpha)=\frac{1}{2}\mathrm{p}^2 f(x,\theta_\alpha)+U(x,\theta_\alpha)f(x,\theta_\alpha)-\sum_{\beta=1}^{p-1}|U_\beta(x,\sigma)|f(x,\theta_{\alpha+\beta}). \quad (3.33)$$

$$\overline{h^0_{\mathbb{Z}_p}}=\begin{cases} h^0_{\mathbb{Z}_p} & \text{if } \mathcal{E}\left[h^0_{\mathbb{Z}_p}\right]\geq 0,\\ h^0_{\mathbb{Z}_p}-\mathcal{E}\left[h^0_{\mathbb{Z}_p}\right] & \text{if } \mathcal{E}\left[h^0_{\mathbb{Z}_p}\right]<0.\end{cases} \quad (3.34)$$

としよう．**定理** 3.9 から直ちに次の系が従う．

系 3.10 (双極不等式) 定理 *3.9 の条件を仮定する．このとき* $h_{\mathbb{Z}_p}-\mathcal{E}\left[h^0_{\mathbb{Z}_p}\right]\geq 0$. さらに

(1) もし $\mathcal{E}\left[h^0_{\mathbb{Z}_p}\right]\geq 0$ ならば

$$\left|\left(f,e^{-t\left(\Psi\left(h_{\mathbb{Z}_p}\right)+V\right)}g\right)\right|\leq\left(|f|,e^{-t\left(\Psi\left(\overline{h^0_{\mathbb{Z}_p}}\right)+V\right)}|g|\right) \quad (3.35)$$

かつ $\mathcal{E}\left[\Psi\left(\overline{h^0_{\mathbb{Z}_p}}\right)+V\right]\leq\mathcal{E}\left[\Psi\left(h_{\mathbb{Z}_p}\right)+V\right]$;

(2) もし $\mathcal{E}\left[h^0_{\mathbb{Z}_p}\right]<0$ ならば，

$$\left|\left(f,e^{-t\left(\Psi\left(h_{\mathbb{Z}_p}-\mathcal{E}\left[h^0_{\mathbb{Z}_p}\right]\right)+V\right)}g\right)\right|\leq\left(|f|,e^{-t\left(\Psi\left(\overline{h^0_{\mathbb{Z}_p}}\right)+V\right)}|g|\right) \quad (3.36)$$

かつ $\mathcal{E}\left[\Psi\left(\overline{h^0_{\mathbb{Z}_p}}\right)+V\right]\leq\mathcal{E}\left[\Psi\left(h_{\mathbb{Z}_p}-\mathcal{E}\left[h^0_{\mathbb{Z}_p}\right]\right)+V\right]$.

証明: 次の評価に注意せよ．

$$\left|\exp\left(\sum_{\beta=1}^{p-1}\int_0^{T_t^\Psi+}\log\left(-U_\beta\left(\theta_{N^\beta_{s-}}\right)\right)dN^\beta_s\right)\right|\leq\exp\left(\sum_{\beta=1}^{p-1}\int_0^{T_t^\Psi+}\log\left|U_\beta\left(\theta_{N^\beta_{s-}}\right)\right|dN^\beta_s\right). \quad (3.37)$$

定理 3.9 と (3.37) から

$$\left|\left(f,e^{-th_{\mathbb{Z}_p}}g\right)\right|\leq\left(|f|,e^{-th^0_{\mathbb{Z}_p}}|g|\right). \quad (3.38)$$

が従う．これはさらに $\mathcal{E}\left[h^0_{\mathbb{Z}_p}\right]\leq\mathcal{E}\left[h_{\mathbb{Z}_p}\right]$ を意味し，$h_{\mathbb{Z}_p}-\mathcal{E}\left[h^0_{\mathbb{Z}_p}\right]\geq 0$. が従う．(3.35) と (3.36) は**定理** 3.9 と (3.37) から従う． **終り**

系 3.11 $\sum_{\beta=1}^{p}c_\beta<1$ *とする．(A2) と (3.20) を仮定する．さらに* $|V|$ *は* $\Psi\left(\overline{h^0_{\mathbb{Z}_p}}\right)$ *に相対有界でその相対閾値を* b *とする．このとき* $|V|$ *も* $\Psi\left(\overline{h_{\mathbb{Z}_p}}\right)$ *に相対有界でその相対閾値は* b *を超えない．*

証明: $\mathcal{E}\left[h^0_{\mathbb{Z}_p}\right]<0$ の場合に証明する．$\mathcal{E}\left[h^0_{\mathbb{Z}_p}\right]\geq 0$ の場合はより簡単に示せる．$\epsilon>0$ に対して,

$$\|Vf\|\leq(b+\epsilon)\left\|\Psi\left(\overline{h^0_{\mathbb{Z}_p}}\right)f\right\|+c\|f\|. \tag{3.39}$$

系 3.10 によって

$$\frac{\||V|\left(\Psi\left(h_{\mathbb{Z}_p}-\mathcal{E}\left[h^0_{\mathbb{Z}_p}\right]\right)+E\right)^{-1}f\|}{\|f\|}\leq\frac{\||V|\left(\Psi\left(\overline{h^0_{\mathbb{Z}_p}}\right)+E\right)^{-1}|f|\|}{\|f\|}. \tag{3.40}$$

$E\to\infty$ のとき (3.39) から (3.40) の右辺は $b+\epsilon$ より小さな数へ収束する．よって

$$\|Vf\|\leq(b+\epsilon)\left\|\Psi\left(h_{\mathbb{Z}_p}-\mathcal{E}\left[h^0_{\mathbb{Z}_p}\right]\right)f\right\|+c_b\|f\|. \tag{3.41}$$

$X<Y$ かつ $X<0$ としよう．

$$\Psi(u-X)-\Psi(u-Y)=b(Y-X)+\int_0^\infty e^{-(u-Y)y}(1-e^{-(Y-X)y})\lambda(dy),\quad u\geq Y,$$

なので $\sup_{u\geq Y}|\Psi(u-X)-\Psi(u-Y)|\leq\Psi(Y-X)$．これと $\mathcal{E}\left[h^0_{\mathbb{Z}_p}\right]\leq\mathcal{E}\left[h_{\mathbb{Z}_p}\right]$ から

$$\sup_{u\geq\mathcal{E}\left[h_{\mathbb{Z}_p}\right]}\left|\Psi(u-\mathcal{E}\left[h^0_{\mathbb{Z}_p}\right])-\Psi(u-\mathcal{E}\left[h_{\mathbb{Z}_p}\right])\right|\leq\Psi(\mathcal{E}\left[h_{\mathbb{Z}_p}\right]-\mathcal{E}\left[h^0_{\mathbb{Z}_p}\right])$$

をえる．よって

$$\|\Psi(h_{\mathbb{Z}_p}-\mathcal{E}\left[h^0_{\mathbb{Z}_p}\right])f\|\leq\|\Psi(h_{\mathbb{Z}_p}-\mathcal{E}\left[h_{\mathbb{Z}_p}\right])f\|+\Psi(\mathcal{E}\left[h_{\mathbb{Z}_p}\right]-\mathcal{E}\left[h^0_{\mathbb{Z}_p}\right])\|f\|.$$

ϵ は任意だったので系が (3.41) から従う． **終り**

系 3.12 $\sum_{\beta=1}^p c_\beta<1$ とする．V が $\Psi(\overline{h^0_{\mathbb{Z}_p}})$ に相対有界でその相対閾値が真に *1* より小さいとする．さらに *(3.20)* を仮定する．

(1) *(A2)* を仮定する．このとき $H^\Psi_{\mathbb{Z}_p}$ は $D\left(\Psi\left(\overline{h_{\mathbb{Z}_p}}\right)\right)$ 上で自己共役，また $\Psi\left(\overline{h_{\mathbb{Z}_p}}\right)$ の任意の芯上で本質的自己共役である．特に *(A3)* の下で $H^\Psi_{\mathbb{Z}_p}$ は $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 上で本質的自己共役である．

(2) *(A3)* を仮定する．このとき $e^{-tH^\Psi_{\mathbb{Z}_p}}$ の経路積分表示は *(3.9)* で与えられる．

証明: (1) は自明．(2) も**定理** 2.6 の証明の (Step 4) と同様の近似理論で示せる． **終り**

3.3 相対論的シュレディンガー作用素・スピンあり

$d=3$，$p=2$ とする．よって $\theta_\alpha=\theta_\alpha^{(2)}$, $\alpha=1,2$, かつ $\theta_1=-1$，$\theta_2=+1$．相対論的シュレディンガー作用素は $L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^2)$ 上に

$$h^{\mathrm{rel}}_{1/2}=\sqrt{2h_{1/2}+m^2}-m,\quad m\geq 0, \tag{3.42}$$

で与えられる．ここで $h_{1/2}=(\sigma\cdot(\mathrm{p}-a))^2$. (A4) を仮定しよう．このとき $h_{1/2}^{\mathrm{rel}}$ は

$$h_{\mathbb{Z}_2}^{\mathrm{rel}}=\sqrt{2h_{\mathbb{Z}_2}+m^2}-m \tag{3.43}$$

にユニタリー同値である．ここで $h_{\mathbb{Z}_2}$ は $L^2(\mathbb{R}^3\times\mathbb{Z}_2)$ 上に

$$(h_{\mathbb{Z}_2}f)(x,\theta)=\left(\frac{1}{2}(\mathrm{p}-a)^2f\right)(x,\theta)-\frac{1}{2}\theta b_3(x)f(x,\theta)-\frac{1}{2}\Big(b_1(x)-i\theta b_2(x)\Big)f(x,-\theta)$$

で定義される．明らかに $h_{\mathbb{Z}_2}^{\mathrm{rel}}$ は非負で，$h_{\mathbb{Z}_2}^{\mathrm{rel}}=\Psi(h_{\mathbb{Z}_2})$，$\Psi(u)=\sqrt{2u+m^2}-m$ となる．

定理 3.13 *(A4) を仮定し，さらに以下の (1)-(4) を仮定する．*

(1) V は $\sqrt{\mathrm{p}^2+m^2}$ に相対有界でその相対閾値が $A<1$;

(2) $-\frac{1}{2}b_j$, $j=1,2,3$, は $\frac{1}{2}\mathrm{p}^2$ に相対有界でその相対閾値が $\kappa_j\geq 0$;

(3) $A\left(1-(\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3)\right)^{-1/2}<1$;

(4) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|\log(\frac{1}{2}\sqrt{b_1(y)^2+b_2(y)^2})|}{2\pi|x-y|}dy<\infty$, $\quad$ *a.e.* $x\in\mathbb{R}^3$.

このとき $h_{1/2}^{\mathrm{rel}}+V$ (resp. $h_{\mathbb{Z}_2}^{\mathrm{rel}}+V$) は $\mathbb{C}^2\otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ (resp. $\ell^2(\mathbb{Z}_2)\otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$) 上で本質的自己共役で

$$(f,e^{-t(h_{\mathbb{Z}_2}^{\mathrm{rel}}+V)}g)=\sum_{\alpha=1,2}\int_{\mathbb{R}^3}dx\mathbb{E}_{P\times\mu\times\nu}^{x,\alpha,0}\left[e^{T_t^\Psi}\overline{f(B_0,\theta_{N_0})}g(B_{T_t^\Psi},\theta_{N_{T_t^\Psi}})e^{\mathrm{S}^\Psi}\right] \tag{3.44}$$

が成立する．ここで $\theta_{N_{T_t^\Psi}}=(-1)^{N_{T_t^\Psi}}$, $T_t^\Psi=\inf\{s>0\,|\,B_s+ms=t\}$ で定義される．$\mathrm{S}^\Psi=\mathrm{S}_V^\Psi+\mathrm{S}_a^\Psi+\mathrm{S}_{\mathrm{spin}}^\Psi$ は

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_V^\Psi&=-\int_0^t V(B_{T_s^\Psi})ds,\\
\mathrm{S}_a^\Psi&=-i\int_0^{T_t^\Psi}a(B_s)\circ dB_s,\\
\mathrm{S}_{\mathrm{spin}}^\Psi&=\int_0^{T_t^\Psi}\frac{1}{2}b_3(B_s)\theta_{N_s}ds+\int_0^{T_t^\Psi+}\log\left(\frac{1}{2}\left(b_1(B_s)-i\theta_{N_{s-}}b_2(B_s)\right)\right)dN_s
\end{aligned}$$

で与えられる．

証明: $S=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}b_3 & \sqrt{b_1^2+b_2^2}\\ \sqrt{b_1^2+b_2^2} & -b_3\end{bmatrix}$, $h_{1/2}^0=\frac{1}{2}\mathrm{p}^2+S$ とおこう．S は $\frac{1}{2}\mathrm{p}^2$ に相対有界でその相対閾値は $\kappa=\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3$. 相対論版を

$$h_{1/2}^{\mathrm{rel}}(0)=\sqrt{2(h_{1/2}^0-\mathcal{E}\left[h_{1/2}^0\right])+m^2}-m$$

とおくと $|(f,Sf)|\leq\kappa(f,\frac{1}{2}\mathrm{p}^2f)+\kappa'\|f\|^2$ なので

$$\|\sqrt{\mathrm{p}^2+m^2}f\|^2\leq\|(h_{1/2}^{\mathrm{rel}}(0)+m)f\|^2+\kappa\|\sqrt{\mathrm{p}^2+m^2}f\|^2+(2|\mathcal{E}\left[h_{1/2}^0\right]|+\kappa')\|f\|^2.$$

$\|Vf\| \le A\|\sqrt{\mathrm{p}^2+m^2}f\| + A'\|f\|$ から

$$\|Vf\| \le A\,(1-\kappa)^{-1/2}\,\|h^{\mathrm{rel}}_{1/2}(0)f\| + \left(A' + Am + A\sqrt{2|\mathcal{E}\left[h^0_{1/2}\right]| + \kappa'}\right)\|f\|$$

がわかる．仮定 (3) により V は $h^{\mathrm{rel}}_{1/2}(0)$ に相対有界でその相対閾値は $A\,(1-\kappa)^{-1/2} < 1$ なので，少なくとも 1 よりは小さい．よって $\mathbb{C}^2 \otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 上での $h^{\mathrm{rel}}_{1/2} + V$ の本質的自己共役性が**系** 3.12 から従う．

$$\int_0^\infty ds \int_{\mathbb{R}^3} dy (2\pi s)^{-3/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{2s}} |\log(U_1(y))| = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\log(\frac{1}{2}\sqrt{b_1(y)^2+b_2(y)^2})|}{2\pi|x-y|} dy < \infty$$

なので (3.28) は満たされる．よって (3.44) が**定理** 3.9 から従う． **終り**

次に双極不等式を導こう．スピンを含むと少々複雑な形になる．

$$\tilde{h}^{\mathrm{rel}}_{1/2} = \sqrt{2(h_{1/2} - \mathcal{E}\left[h^0_{1/2}\right]) + m^2} - m, \quad \tilde{h}^{\mathrm{rel}}_{\mathbb{Z}_2} = \sqrt{2(h_{\mathbb{Z}_2} - \mathcal{E}\left[h^0_{\mathbb{Z}_2}\right]) + m^2} - m$$

としよう．$h^0_{\mathbb{Z}_2}$ を $h_{\mathbb{Z}_2}$ で a と U_1 を各々0 と $|U_1| = \frac{1}{2}\sqrt{b_1^2(x)+b_2^2(x)}$ で置き換えたものとする．即ち

$$(h^0_{\mathbb{Z}_2}f)(x,\theta) = \left(\frac{1}{2}\mathrm{p}^2 f\right)(x,\theta) - \frac{1}{2}\theta b_3(x) f(x,\theta) - \frac{1}{2}\sqrt{b_1(x)^2+b_2(x)^2} f(x,-\theta).$$

$h^0_{\mathbb{Z}_2}$ は $h^0_{1/2} = \frac{1}{2}\mathrm{p}^2 - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} b_3 & \sqrt{b_1^2+b_2^2} \\ \sqrt{b_1^2+b_2^2} & -b_3 \end{bmatrix}$ にユニタリー同値である．$h_{1/2} - \mathcal{E}\left[h^0_{1/2}\right] \ge 0$ と $h_{\mathbb{Z}_2} - \mathcal{E}\left[h^0_{\mathbb{Z}_2}\right] \ge 0$ に注意しよう．

$$h^{\mathrm{rel}}_{\mathbb{Z}_2}(0) = \sqrt{2(h^0_{\mathbb{Z}_2} - \mathcal{E}\left[h^0_{\mathbb{Z}_2}\right]) + m^2} - m$$

とおく．

系 3.14 (双極不等式) 定理 *3.13* の条件を仮定する．このとき

$$\left|\left(f, e^{-t(\tilde{h}^{\mathrm{rel}}_{\mathbb{Z}_2}+V)}g\right)\right| \le \left(|f|, e^{-t(h^{\mathrm{rel}}_{\mathbb{Z}_2}(0)+V)}|g|\right). \tag{3.45}$$

特に $\mathcal{E}\left[h^{\mathrm{rel}}_{1/2}(0)+V\right] \le \mathcal{E}\left[\tilde{h}^{\mathrm{rel}}_{1/2}+V\right]$ が成り立つ．

3.4 磁場の零点

$b_1(x) - i\theta b_2(x)$ がある $x \in \mathbb{R}^d$ で消える場合を考える．このとき

$$\int_0^\infty \left|\log\frac{1}{2}(b_1(B_s) - i\theta_{N_{s-}} b_2(B_s))\right| dN_s < \infty$$

は非自明である．そこで [HL08] のアイデアを使う．$\delta_\epsilon(z) = \begin{cases} 1, & |z| < \epsilon/2, \\ 0, & |z| \ge \epsilon/2, \end{cases}$, $z \in \mathbb{C}$, として $\chi_\epsilon(z) = z + \epsilon\delta_\epsilon(z)$ とおく．こうすれば

$$\left|\chi_\epsilon\left(-\frac{1}{2}(b_1(x) - i\theta b_2(x))\right)\right| > \epsilon/2, \quad (x,\theta) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2$$

となりゼロ点が回避できる．$h^{\epsilon}_{\mathbb{Z}_2}$ を $h_{\mathbb{Z}_2}$ の非対角部分を $\chi_\epsilon\left(-\frac{1}{2}(b_1(x)-i\theta b_2(x))\right)$ で置き換えたものとして定義する．即ち

$$h^{\epsilon}_{\mathbb{Z}_2}f(x,\theta)=\left(h-\frac{1}{2}\theta b_3(x)\right)f(x,\theta)+\chi_\epsilon\left(-\frac{1}{2}(b_1(x)-i\theta b_2(x))\right)f(x,-\theta).$$

$h^{\epsilon}_{\mathbb{Z}_2}$ は $D(h)$ 上自己共役である．$h^{\mathrm{rel},\epsilon}_{\mathbb{Z}_2}=\sqrt{2\overline{h^{\epsilon}_{\mathbb{Z}_2}}+m^2}-m$ と定義する．ここで $\overline{h^{\epsilon}_{\mathbb{Z}_2}}=h^{\epsilon}_{\mathbb{Z}_2}-\mathcal{E}\left[h^{\epsilon}_{\mathbb{Z}_2}\right]$．$h^{\epsilon}_{\mathbb{Z}_2}\to h_{\mathbb{Z}_2}$ $(\epsilon\downarrow 0)$ が一様レゾルベントの意味で示せるので $\mathcal{E}\left[h^{\epsilon}_{\mathbb{Z}_2}\right]\to\mathcal{E}\left[h_{\mathbb{Z}_2}\right]$ $(\epsilon\downarrow 0)$ となる．**定理** 3.13 の条件の下（ただし (4) を仮定しない）$h^{\mathrm{rel},\epsilon}_{\mathbb{Z}_2}$ が $\ell^2(\mathbb{Z}_2)\otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 上で本質的自己共役となることが示せる．$h^{\mathrm{rel},\epsilon}_{\mathbb{Z}_2}+V$ の経路積分表示は (3.44) で $\mathrm{S}^{\Psi}_{\mathrm{spin}}$ の代わりに

$$\mathrm{S}^{\Psi}_{\mathrm{spin}}(\epsilon)=\int_0^{T_t^\Psi}\left(\frac{1}{2}b_3(B_s)\theta_{N_s}-\mathcal{E}\left[h^{\epsilon}_{\mathbb{Z}_2}\right]\right)ds \\ +\int_0^{T_t^\Psi+}\log\left(-\chi_\epsilon\left(-\frac{1}{2}(b_1(B_s)-i\theta_{N_{s-}}b_2(B_s))\right)\right)dN_s$$

とすればいい．さらに $\lim_{\epsilon\downarrow 0}\exp\left(-t(h^{\mathrm{rel},\epsilon}_{\mathbb{Z}_2}+V)\right)=\exp\left(-t(h^{\mathrm{rel}}_{\mathbb{Z}_2}+V)\right)$ なので，次の定理をえる．

定理 3.15 *(A4)* と**定理** *3.13(1)-(3)* を仮定する．このとき $h^{\mathrm{rel}}_{\mathbb{Z}_2}+V$ の経路積分表示は

$$(f,e^{-t(h^{\mathrm{rel}}_{1/2}+V)}g)=\lim_{\epsilon\downarrow 0}\sum_{\alpha=1,2}\int_{\mathbb{R}^3}dx\mathbb{E}^{x,\alpha,0}_{P\times\mu\times\nu}\left[e^{T_t^\Psi}\overline{f(B_0,\theta_{N_0})}g(B_{T_t^\Psi},\theta_{N_{T_t^\Psi}})e^{\mathrm{S}^\Psi(\epsilon)}\right]\tag{3.46}$$

で与えられる．ここで $\mathrm{S}^\Psi(\epsilon)=\mathrm{S}^\Psi_V+\mathrm{S}^\Psi_a+\mathrm{S}^\Psi_{\mathrm{spin}}(\epsilon)$.

参考文献

[ALS83] G. F. De Angelis, G. Jona-Lasinio, and M. Sirugue, Probabilistic solution of Pauli-type equations, *J. Phys.* **A16** (1983), 2433–2444.

[ARS91] G. F. De Angelis, A. Rinaldi, and M. Serva, Imaginary-time path integral for a 相対論的 spin-(1/2) particle in a magnetic field, *Europhys. Lett.* **14** (1991), 95–100.

[CMS90] Carmona, R., Masters, W.C. and Simon, B.: Relativistic Schrödinger operators: asymptotic behavior of the eigenvalues, *J. Funct. Anal.* **91** (1990), 117–142.

[Hir07] F. Hiroshima, Fiber Hamiltonians in nonrelativistic quantum electrodynamics, *J. Funct. Anal.* **252** (2007), 314–355.

[Hir09] F. Hiroshima, Path integrations of relativistic Schrödinger operators and Bernstein functions, 京大数理研講究録 **1658**, (2009), 18–34.

[HIL09] F. Hiroshima, T. Ichinose, and J. Lőrinczi, J. Path integral representation of Schrödinger operator with Bernstein functions of the Laplacian, preprint 2009.

[HL08] F. Hiroshima and J. Lőrinczi, Functional integral representation of the Pauli-Fierz model with spin 1/2, *J. Funct. Anal.* **254** (2008), 2127–2185.

[HL08] F. Hiroshima and J. Lőrinczi, Functional integral representations of nonrelativistic QED, 京大数理研講究録 **1600**, 68–91

[LS81] H. Leinfelder and C. G. Simader, Schrödinger operators with singular magnetic potentials, *Math. Z.* **176** (1981), 1–19.

[Sim04] B. Simon, *Functional integration and quantum physics*, AMS Chelsea Publishing, 2004.